скорая педагогическая помощь

**Д.А. Зулумханов**

ПРОСТАЯ   
МАТЕМАТИКА

Для маленьких и взрослых

Махачкала 2018

УДК 51(078.8)

ББК 74.262.21

З – 937

**Д.А. Зулумханов.** Простая математика для маленьких и взрослых. – Махачкала: «Новый круг», 2018. – 316 с.

Издание 5-е.

**ISBN 978-5-904621-76-6**

Многие родители, наверное, впадали в отчаяние после очередной безуспешной попытки помочь своему ребенку сделать уроки. Если ребенок еще в начальной школе, то попытка следует за попыткой. Но когда ребенок уже в 8-ом или в 10-ом – оставь надежды… Вся помощь сводится к окрику: «А уроки ты сделал?!»

Что делать? Ищите *Учителей*. А пока вы их ищете, скорая педагогическая помощь будет весьма кстати.

Оригинальная методика, названная автором *Методом   
базовых абстракций*, позволяет легко освоить базовый курс математики от счета на палочках и натуральных чисел, до тригонометрических уравнений и исследования функций с помощью производных.

**ISBN 978-5-904621-76-6**

© Зулумханов Д.А., 2018

# Предисловие

Никогда не помогайте ребенку делать школьные уроки. Вы этого не умеете делать и только все испортите.

Во-первых, вся ваша «помощь» сведется к тому, что уроки вместо ребенка сделаете вы. А это – приучение к обману. Ведь в школе ребенок будет делать вид, что уроки сделал он сам.

Во-вторых, проверяя задания, учитель получает информацию, на основе которой делает свои выводы. Ваше вмешательство искажает эту информацию.

Делать уроки – значит, практиковаться в том, что уже изучено. Поэтому лучше, если не вы детям, а они вам будут помогать разбираться с тем новым, что они изучили, узнали в школе.

И, конечно, никогда не ругайте своего ребенка. Почему? Просто не ругайте и все!

К частой ругани он скоро привыкнет и перестанет обращать внимания. Более того, постоянная ругань вселит в него уверенность в то, что вы его не любите и что он вам не нужен. Разубедить будет трудно. Даже если вы потом перестанете ругать и будете ласковы, он еще долго будет смотреть с недоверием. Очень часто из-за этого родители опять срываются в крик: «Ну, что тебе еще надо?! Мы тебе и то сделали и то, а ты все смотришь волком!» Тем самым разрушая последнюю надежу ребенка на то, что вы были искренни.

Запрет на ругань не означает запрета на наказание. Только не надо путать наказание с карой, возмездием или насилием.

*Наказание* – это один из элементов обучения. Обучения действию по правилам. От слова «наказ». И вы должны быть готовы наказать за проступок. Но надо четко объяснить, за что ребенок наказан, какое именно правило он нарушил. Причем, это правило должно было быть ему заранее известно, и о наказании за нарушение, тоже должно было быть известно.

Наказание может быть достаточно простым: можно поставить в угол, можно запретить выходить из своей комнаты, можно лишить права смотреть телевизор или выходить во двор. Но высказать это надо, глядя прямо в глаза, и, самое главное, вы должны четко обозначить срок наказания. Если срок обозначен, то ни при каких обстоятельствах нельзя нарушать его. Ваша «жалость» будет понята или как слабость, или как нарушение вами самими правил игры. Поэтому, прежде чем объявить о наказании и о его *длительности*, хорошенько подумайте.

И помните, воспитывает не суровость наказания или большая его длительность, а обязательность и решительность в его применении. Пусть ребенок в наказание за проступок посидит в темной комнате ровно две минуты. Главное, чтоб он знал, за что он наказан и что после истечения двух минут он опять будет принят вами и о его проступке больше никто и никогда не вспомнит. Нельзя наказывать (даже напоминанием) за один и тот же проступок дважды.

Играйте с детьми чаще. Но помните: игра – это соревнование по правилам, которым подчиняются все. Вы сами – в первую очередь.

Первое правило любой игры: нельзя заставлять играть! Лучше всего, если вы сами с трудом, но согласитесь на предложение детей поиграть.

Второе правило игры: заранее точно должна быть обозначена длительность игры. Вы должны точно установить время, когда игра должна закончиться. Ни при каких обстоятельствах не соглашайтесь продолжить игру сверх заранее установленного времени. У детей, особенно возбужденных игрой, пропадает чувство времени, и они могут довести себя до полного изнеможения, сами того не замечая. Надо помочь им выйти из игры.

А где взять игры, да еще такие, чтобы с образовательным уклоном?

Они повсюду вокруг вас. Надо только научиться видеть или… немного вспомнить. Ведь и вы когда-то были детьми.

# Как задавать вопросы?

Самая интересная игра – та, которая рождается здесь и сейчас, как по волшебству. Станьте для своих детей волшебниками. Это нетрудно. Нетрудно, пока они вам верят.

Самый простой способ – притвориться, что вы не знаете чего-то, казалось бы, самого простого, что вы должны были бы знать. Этот прием прямо противоположен совершенно недопустимому случаю, когда рассерженный папа кричит на ребенка: «Как?! Ты не знаешь таких простых вещей?!!»

Простых вещей для детей не существует.

Например, спросите ребенка, измеряли ли они что-либо в классе. Неважно что. Потом спросите его, а что значит *измерить*? Притворитесь, что вы не знаете, что это значит. Многим, думаю, и притворяться не придется. Но это замечательно, потому что это будет честно, и вы дадите шанс ребенку побыть в роли учителя. Главное – честно слушать, честно говорить о том, что вы поняли и чего не поняли, всегда соглашаться с верными доводами и никогда не пытаться успеть сказать правильный вариант раньше ребенка. И не забудьте искренне поблагодарить его за урок, если он будет успешно завершен. Потому что настоящий урок всегда получают обе стороны: и учитель, и ученик. Учитель так же нуждается в ученике, как ученик в учителе.

Основной инструмент учителя – вопрос. «Научить – значит, мудро спросить». Так говорил великий учитель Алкуин.

Мы тоже попробуем задать если не мудрые, то хотя бы простые вопросы, имея целью именно обучить.

Например:

– Что значит измерить?

– Ну, значит, измерить длину…

– Но я же не знаю, что значит измерить.

– Ну, измерить линейкой…

– А что надо сделать с линейкой, чтобы, например, измерить длину стола?

– Надо вот так…

– А ты не показывай, ты говори. А я буду делать то, что ты будешь говорить. Дай линейку. Так, что ты говоришь надо делать, чтобы измерить?

– Надо поставить линейку на стол…

– А она стоять не будет…

– Ну, положить…

– Положил!

– Да не туда…

– А куда?

– На угол…

– Всю линейку? Прямо на угол? Пожалуйста…

– Да не так!

– А как?

– Положить на начало стола…

– А где у стола начало?

– Ну, с краю стола…

– Вот, линейка на краю стола…

– Не так!

– А как?

– …

и т.д.

Это один из примеров, как самое, казалось бы, простое, вдруг становится очень сложным. А ведь достаточно было просто дать определение измерению.

Но, что такое *определение*?

В учебниках определения выделяют жирным шрифтом, но практически нигде не написано, что это такое. Да и вы сами вряд ли спрашивали себя о том, что же такое «определение».

Итак, ваша задача – вначале сделать все сложным. Ведь если это удастся, значит, знания у ребенка были ненастоящие. Он просто заучил термины и пользовался ими. А вот понимал ли он их?

Как и в медицине: вначале диагноз, выявление проблемы, понимание проблемы, а уже потом лечение. Но если вам не удается найти проблему, это вовсе не значит, что ее нет. Может оказаться, что вы просто не можете ее заметить. Здесь на помощь должны прийти профессионалы.

И в данной книге, уважаемый читатель, проблемы будут появляться там, где вы их совершенно не ожидали встретить.

# Что такое определение?

Измерения сопровождают человека всю жизнь. Постоянно приходится что-либо измерять. Но вот описать словами процедуру измерения удается не сразу. Правда, и особой необходимости в этом не бывает. Но ребенок должен научиться описывать своими словами то, что он сам делает. Это очень важно! Ведь, иначе, он не научится описывать то, что он чувствует.

Для начала пусть он воспользуется вашей помощью. Попробуем описать процедуру измерения длины стола.

Пример: «Я беру линейку. Кладу ее на стол. Перемещаю ее так, чтобы один конец линейки совпал с ближним левым углом стола. Потом располагаю линейку вдоль той стороны стола, длину которой хочу описать. Отмечаю на столе положение второго конца линейки. Потом переношу линейку так, чтобы первый конец линейки совпал с моей отметкой. Отмечаю на столе новое положение второго конца линейки. И так, пока не доберусь до другого угла стола. Здесь я делаю отметку на линейке в том месте, которое совпадет с углом стола. Теперь считаю общее количество сантиметров. Длина стола описана: я провел измерение».

Такое или примерно такое получится описание процедуры измерения длины стола. На первый взгляд, как будто, простое. Но попробуйте предложить сделать его вашему ребенку или попробуйте повторить описание сами. Будет забавно видеть, как в самых неожиданных местах возникают трудности. Превратите их в веселые трудности.

\* \* \*

Каждый урок должен иметь цель.

Какая была цель, когда вы спросили, что значит измерить? Цель должна была быть. Без нее не стоило и спрашивать. Если ребенок не убедится в том, что ваш вопрос не праздное любопытство, а именно урок, т.е. действие, имеющее целью научить, он перестанет замечать ваши вопросы. Мы учим ребенка измерять, чтобы он смог в будущем описать размер чего-либо так, чтобы другой человек его понял.

А только ли для этого нужна ему учеба?

Если бы только для этого, то вряд ли люди когда-то в древности стали бы учиться… Ребенок начинает учиться не для того чтобы описывать размер и не потому что он беспокоится о своем будущем. Ребенок получает физическое удовольствие от процесса познания. Это врожденное его свойство. Если, конечно, оно уже не отбито «школой».

После того как ребенок научился без запинки описывать процедуру измерения, предложите ему построить кратчайшее описание. После нескольких его безуспешных попыток помогите ему, подсказав, что вся эта процедура – сравнение. Потом заинтригуйте тем, что в кратчайшем описании останется всего три слова. Наша цель как раз в этом и заключатся: в получении предельно краткого, кратчайшего описания.

*Кратчайшее описание называется* ***определением****.*

На начальном этапе очень важно научить ребенка самостоятельно строить определения.

После нескольких попыток может получиться примерно следующее: измерить – значит, сравнить с линейкой… Но, что такое линейка? Пусть ребенок попытается вам описать, что такое линейка, ну а вы притворитесь, будто вы не знаете, что это такое.

Например:

– А что такое линейка?

– Ну, это такая… линейка…

– Линейка – это линейка?

– Это… это такая… деревянная… на ней такие деления, сантиметры!

– А сантиметры – это что?

– Сантиметры – это то, чем измеряют длину.

– Измеряем линейкой или сантиметром?

– Линейкой…

– А линейка – это что?

– ?

– А можно ли измерить длину карандашом?

– Нельзя…

– Ну почему? Вот я беру карандаш и сравниваю длину стола с длиной карандаша: у меня получилось… 12 карандашей.

– Но карандаши бывают разные!

– Отлично! А линейки?

– Тоже.

– Очень хорошо! А сантиметры?

– А сантиметры все одинаковые!

Описать длину чего-либо, значит сравнить ее с чем-то, чья длина всем известна, с тем, что принято за единицу длины. У нас – это один метр. Он всем известен. А то, что принято за единицу сравнения и известно всем, называют *эталоном*. Сантиметр – сотая доля этого эталона.

Следовательно, можем построить окончательное определение: **измерение —** **сравнение с эталоном**.

Теперь можно сделать обобщение. Пусть ребенок сам вначале попробует кратко пересказать суть всего, что было пройдено. Вы ему только помогайте.

Здесь надо отметить, что «ребенку», с которым можно так вести уроки, может быть и 8 лет, и 18 лет. Результаты будут одинаковыми.

# Что такое термины?

Повторение – мать учения.

Верно. Но повторение нужно не только для учения. Повторение помогает ребенку заметить собственные успехи. Успех окрыляет, дает силы двигаться дальше. Повторение напоминает ребенку, каким он был раньше, помогает ему сравнить себя нового с собой прежним и увидеть разницу, заметить собственное развитие. Часто, после такого сравнения, он уже сам улыбается своим прежним ошибкам и страхам. И это помогает ему справиться со страхами новыми.

Ребенок не замечает, как сам растет. Да и родители этого часто не замечают. Но стоит начать отмечать рост ребенка зарубкой на косяке двери, как все меняется. Появилось с чем сравнивать.

Повторим содержание предыдущих уроков.

Вначале пусть это сделает ребенок. Пусть теперь он будет в роли учителя. Вы – только помогаете. У него должно получиться примерно следующее.

«Измерить – значит сравнить с эталоном. Эталон – это единица сравнения известно всем. Единицей сравнения длины является 1 *метр*. Измерить длину чего-либо – значит, сравнить его с 1 метром или 1 сантиметром. Сравнение производят с помощью линейки».

Теперь остается отметить, что измерить массу – значит, сравнить с эталоном массы, т.е. с 1 *кг*; измерить площадь – значит, сравнить с эталоном пощади, т.е. с 1 *кв.м* и т.д. Вышли на универсальность данного определения.

Как будто все… Все для данной темы под названием «Измерение»

Здесь наступает критический момент. Исчезла интрига. Закончилась игра, и появилось ощущение разочарования.

– И это все? – как будто спрашивает ребенок. – Дальше будет обычная рутина обычных уроков?

Нет, конечно. Самое интересное только начинается. Причем, по тем же правилам, что и прежде. Мы будем находить необычное и непонятное в самом, казалось бы, обычном и понятном. Нужны парадоксальные вопросы.

Как научиться ставить вопросы? Ведь именно вопрос есть самое главное в обучении. Вспомним Алкуина: «Научить – значит мудро спросить».

Предыдущий урок закончился тем, что построили *определение термина «измерение».* Как будто все понятно. Ну, так и спросите вашего ребенка, все ли ему понятно? Он, конечно, ответит, что все. Предупредите, что здесь его ждет ловушка. На самом деле ему не все понятно. Но он будет настаивать и даже попытается повторить определение…

Вот тут вы его и застигнете врасплох: а что такое определение?

Он этого не знает. Думаю, и вы уже не помните. Хотя на прошлом уроке мы дали определение *определению*. И вы тоже застигнуты врасплох. Более того, ребенок теперь сам может пойти в атаку и спросить, а что такое *термин*?

Обыватель, не знакомый с предыдущими уроками, из выражения «дайте определение термину измерение», поймет только одно слово – «дайте». Остальными словами он пользуется скорей по привычке. Правда, ему большего и не надо, он свою учебу давно закончил. Но тем, кто все еще учится и учит, надо иметь четкое представление о каждом слове. Иначе будет невозможно учиться и учить.

Что же такое *определение*? Рассмотрим его еще раз. Пойдем по той же процедуре, по которой мы получили ответ на вопрос, что значит измерить? Начнем с описания.

Начертите окружность и попросите ребенка описать своими словами то, что он видит. Он ответит, что это круг.

Теперь попросите его не пользоваться словом круг и словами, однокоренными со словом круг (кружок, окружность и т.д.). Он, скорее всего, скажет, что это колесо или солнце или еще что-нибудь. А вы напомните ему, что он должен описать только то, что он видит. Ни колеса, ни солнца здесь нет. Что это?

Замешательство, в которое придет ребенок, не должно вас расстраивать или сердить. Ведь вы и сами в некотором замешательстве. Если не читать текст дальше и самостоятельно попытаться построить описание того, что вы сами начертили, то и у вас не сразу получится. Войдите в положение ребенка и совместно с ним преодолевайте трудности.

После нескольких его безуспешных попыток, начертите рядом с окружностью прямую линию. Спросите, что это? Ребенок скажет, что это линия. Какая? Прямая.

Теперь начертите рядом с прямой линией кривую и спросите, какая она. Ответы могут быть разные. Обычно говорят, что это волнистая или неровная линия.

Напомните, что все непрямые линии называются *кривыми*. Следовательно, это – кривая линия.

Теперь возвращаемся к первому рисунку. Это – тоже кривая. Чем отличаются две кривые? Помогите ребенку увидеть, что одна кривая замкнутая, а другая – нет.

Итак, что это? Это – кривая линия, начерченная на листе бумаги, и она замкнута. Отлично!

Замкните теперь вашу вторую кривую. Просто проведите карандашом линию, соединяющую концы кривой. Теперь и она замкнута. Чем отличаются две замкнутые кривые?

Поставьте точку в центре окружности и точку примерно в центре вашей второй замкнутой кривой. Да, первая кривая равноудалена от своей точки, а вторая – нет.



Кратчайший вариант получившегося описания будет: *замкнутая кривая, равноудаленная от данной точки*.

Кто бы ни описывал, кто бы ни пытался получить кратчайшее описание, оно у всех будет одинаковым, потому что кратчайший вариант всегда **единственен**.

*Кратчайшее описание называется* ***определением.***

Так как определение единственно, то его можно обозначить словом и в дальнейшем пользоваться только им.

*Слова, обозначающие определения, называются* ***терминами****.*

Термин, который мы присвоим нашему полученному определению, т.е. замкнутой кривой, равноудаленной от данной точки, будет *окружность*.

Можно заметить, что в глазах ребенка появился огонек. Он не просто понял что-то, он теперь знает, как это делать. Это для него очень важно. И он боится потерять только-только обретенное знание… Обычно, дети порываются записать то, что поняли.

Но, нет. Записывать мы пока не будем. Записывать мы будем только после того, как научимся свободно говорить. Поэтому продолжим.

Попробуем тем же методом описать еще что-нибудь. У нас окружность и данная точка. Попросите описать данную точку. Где и как она расположена относительно окружности. Она находится на одинаковом расстоянии от окружности. А как это сказать всего четырьмя словами. Ребенок уже знает: точка, равноудаленная от окружности! Получили определение. Присвоим ему термин. Это будет *центр окружности*.

***Центр окружности*** *– точка, равноудаленная от окружности.*

Теперь соединим две точки окружности отрезком. (Рис. 2).



Спросите ребенка, – что это? Пусть опишет и получит кратчайшее описание (*определение*).

Подскажем, что это отрезок. Но не любой, а такой, что его концы лежат на окружности. Сообщите, что в кратчайшем варианте должно остаться только пять слов.

В итоге должно получиться определение: *отрезок, соединяющий две точки окружности.*

Сразу сообщим слово, которым обозначается это определение – ***хорда***. Это новый *термин*.

***Хорда –*** *отрезок, соединяющий две точки окружности.*

Постройте отрезок, соединяющий две точки окружности так, чтобы он пересекал центр окружности (рис. 3). Спросите, хорда ли это?



В большинстве случаев дети говорят, что нет.

А вы попросите описать его. Добейтесь, чтобы ребенок сказал, что это отрезок, соединяющий две точки окружности. И какой у него термин? Конечно, хорда. Только в отличие от других хорд, данная хорда пересекает центр окружности. Она делит окружность на две равные части и поэтому заслужила отдельный термин – *диаметр*.

***Диаметр*** *– хорда, пересекающая центр окружности.*

Заметим, что для построения данного определения мы использовали термины, полученные ранее: «хорду» и «окружность».

Соединим точку окружности с ее центром (рис. 4). Получили *отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром*. Это – ***радиус***.



Итак, все работает! Мы научились строить определения и присваивать термины.

Теперь мы знаем то, что и раньше как будто знали.

Совет родителям: прежде, чем провести этот урок с ребенком, порепетируйте его друг с другом. :))

# Как сказки помогают учить уроки?

Сказки, особенно для самых маленьких, это – всегда уроки. Каждая сказка – урок. Какой?

Попросите ребенка рассказать самую короткую сказку для самых маленьких. Причем, именно сказку, а не волшебный рассказ, написанный каким-нибудь автором.

А как отличить настоящую сказку?

В настоящей сказке каждое слово всегда на своем месте. Это – как *определение*. Т.е. кратчайшее описание.

Итак, ребенок задумался. Никак не может решить, что рассказывать. Попросите рассказать, например, «Репку».

Варианты начала сказки могут оказаться разными. И «жили-были дед да баба…», и «однажды посадил дед…», и «жила-была репка…»

Начало должно быть только: «Посадил дед репку». Это очень важно.

Далее, кончено, должно быть: «Выросла репка большая-пребольшая. Пошел дед тянуть репку.»

Не «начал тянуть» и не «стал вытаскивать», а именно «пошел дед тянуть репку».

«Тянет-потянет, вытянуть не может! Позвал дед бабку. Бабка – за дедку, дедка – за репку…»

Порядок не должен нарушаться. Сто раз расскажете сказку и сто раз должно быть одно и то же. Каждое слово на своем месте.

«Тянут-потянут, вытянуть не могут. Позвала бабка внучку!»

Почему это важно?

Малыш, в первый раз слушая сказку, может вообще ничего не понять. Его привлекает только мамин голос и интонация. Но раз за разом, слушая еще и еще, он начинает различать отдельные слова, фразы. Но это если каждый раз порядок слов не менялся. Поменяете местами два слова, и ребенок будет думать, что это уже другая сказка.

«Внучка – за бабку, бабка – за дедку, дедка – за репку. Тянут-потянут, вытянуть не могут.»

Дальше дело пойдет быстрее. Скоро сказка будет рассказана. Теперь можно ее проанализировать. Какой урок заложен в данной сказке?

Ребенок сразу догадается: вместе можем сделать то, что каждый в отдельности сделать не может. Верно! И в работе командой даже самый маленький и слабый может оказаться решающим звеном.

Теперь попросите сосчитать количество персонажей в «Репке». Обычно говорят, что шесть. Но если учесть, что репка тоже персонаж, то – семь. И появление каждого нового персонажа заставляет начинать сказку с самого начала. И пока дойдем до мышки, сказка уже выучена! И не надо ничего специально учить или зубрить.

Значит, чтобы запомнить тему надо повторить ее семь раз. Может отсюда известное: «Семь раз отмерь, один раз отрежь»?

Точно так же каждая новая тема на школьном уроке должна быть связана с предыдущими темами. И при правильном раскладе, нет необходимости зазубривать: все происходит как бы само собой.

Бабка – за дедку, дедка – за репку!

# Что такое счет?

Вы научили ребенка **наблюдать**, **описывать** наблюдаемое, строить **определение** и присваивать ему **термин**. Что дальше?

Дальше будем учиться считать.

Вы, конечно, считать умеете. Но для того, чтобы научить считать ребенка, надо самому понять-вспомнить, что это значит, а потом научиться объяснять…

Но прежде надо, чтобы появилась необходимость в счете. Иначе трудно будет объяснить, почему на эту процедуру надо тратить время и силы. Попробуйте сами себе внятно объяснить, как появилась необходимость в счете и сравните с тем, что будет дальше.

Ребенок уже знает, что такое окружность. Начертите на листе бумаги несколько окружностей. Обратите внимание на то, что один и тот же термин может быть у нескольких объектов. Окружностей теперь много.

А много – это сколько?

Как передать другому человеку информацию о количестве, т.е. как описать количество?

Положите на стол три карандаша. Если другой человек рядом, то вы просто показываете ему карандаши, и он сам видит, сколько их. Но если вы вышли на улицу и кто-то спросил, сколько было на столе карандашей, то нужно описать их количество, а для этого их нужно **сосчитать**.

На первый взгляд, кажется, что ничего сложного здесь нет. Считать умеют все. Но, посмотрим, так ли это.

Положите перед ребенком три карандаша и попросите их сосчитать. Скорее всего, он сразу скажет «три». А вы попросите его все-таки сосчитать. Сосчитать именно эти карандаши. Он начет, указывая пальцем на каждый карандаш, говорить: «раз, два, три». Как только он укажет пальцем на третий карандаш и скажет «три», поднимите этот карандаш и спросите, сколько это? Он скажет, что «один»[[1]](#footnote-1). А почему он только что сказал, что это «три»?

Пусть еще раз сосчитает. Он опять начнет показывать поочередно на карандаши и говорить: «раз, два, три». Как только он укажет на 2-ой карандаш и скажет «два», остановите его, поднимите этот карандаш и спросите, сколько это? Он скажет, что это «один». А почему он сказал, что это «два»? Пусть еще раз сосчитает.

Ребенок уже в некотором замешательстве. Он как будто делает все верно, но счет не получается. Тогда он отчаянно скажет, указывая поочередно на карандаши: «раз, раз, раз».

Тут уже ваш черед отчаянно воскликнуть: «А где же счет? А если бы карандашей было сто?»

Но, вспомните, как ваш малыш учился ходить. Вы же не кричали на него, когда у него ничего не получалось. Вы помогали ему снова и снова, утешая после каждой неудачи. А как вы радовались первому его самостоятельному шагу! И вы не скрывали от него своей радости. И малыш это чувствовал и рвался делать еще шаг… Пусть теперь вашему ребенку десять лет, пятнадцать… Он – все тот же малыш. Он все так же нуждается в вашем утешении и в вашей радости…

Что же такое счет?

Покажите ребенку карандаш и скажите: «это – один карандаш». Потом спросите, какое слово вы сказали лишнее? Будет хорошо, если ребенок быстро догадается, что это слово «один». «Карандаш» и так в единственном числе. Добавлять, что он один, нет необходимости. Теперь поднимите три карандаша и скажите, что это карандаши. Потом поднимите пять карандашей и скажите, что это тоже карандаши. Но количества карандашей в первом и во втором случаях разные. Если мы говорим «карандаши», во множественном числе, то нужно описать их количество. Описание количества и есть *счет*. Но описание количества чего и где?

Возьмите три карандаша, две ручки и один маркер. Спросите, сколько здесь карандашей? Ребенок ответит, что три. А сколько ручек? Две. А сколько маркеров? Один. А сколько предметов? Шесть!

Почему каждый раз были разные ответы?

Потому что речь шла о разных названиях: вначале карандаши, потом ручки, затем фломастеры и, наконец, предметы.

*Набор одноименных предметов* называется **группой.**

*Термин, обозначающий количество единиц в данной группе,* называют **числительным**.

*Символ, обозначающий числительное* – **цифра.**

Надо добавить, что есть исчисляемые группы и неисчисляемые группы. Неисчисляемые, например, – звезды на небе или листья в лесу.

Вспомните, как считали в 1-ом классе? Считали счетными палочками. Заметьте, считали не палочки, а палочками. А как это?

«Дети, на картине много птиц. Сосчитайте их. Считать надо так: одна птица – отложили одну палочку, еще одна птица – отложили еще одну палочку… и так, пока не пересчитаем всех птиц. А теперь, покажите, сколько всего птиц на картине? Верно, столько же, сколько у вас получилось палочек. Палочки вы можете унести с собой и показать дома маме. И мама узнает, сколько было птиц на нашей картине».

Сосчитать – значит, описать количество единиц в данной группе.

А если единиц очень много? Так и видим, как отец послал сына сосчитать баранов в его отаре, а сын привез целый мешок палочек… 3457 штук. На этот случай в наборе первоклассника есть разноцветные палочки. Десять белых палочек обозначим одной красной, десять красных – одной синей, а десять синих – одной черной. Значит, сын должен принести отцу всего три черные палочки, четыре синих, пять красных и семь белых палочек. Надо только запомнить цвета…

Правда, если по дороге сын случайно обронит одну черную палочку, то он ошибется на тысячу овец.

А если делать зарубки на дощечке? Десять зарубок – один крестик. А десять крестиков…. Уже появляются ***цифры*** (римские, например) – символы, обозначающие количество одноименных объектов в группе.

Сегодня для счета мы пользуемся не палочками и не зарубками, а *числительными.*

***Числительные*** *— термины обозначающие количество единиц в группах*.

Без термина «группа» числительное не имеет смысла.

Числительные можно обозначить символами — цифрами.

Группу и числительное можно представить. Число и множество (как математический термин) представить невозможно.

Попробуйте представить число 5. У вас ничего не получится. Символ в виде «5» – это не число, это – цифра. Ее можно записать и римскими цифрами – V. Если вы представили пять предметов, то это только пять предметов (т.е. группа), а не число.

Но вы можете совершать действия над числами, считать числами, а уже полученный результат записать цифрами или числительными.

Точно также, попытка представить множество приведет к описанию группы.

Ребенок вначале учится группировать одноименные предметы. Потом он учится различать их по количеству. Потом он запоминает названия количеств –числительные. Например, сегодня мы учимся распознавать группы по три одноименных элемента. На столе три карандаша – это *группа*. Найдите в комнате еще группы по три. Верно, три цветка в вазе, три богатыря на картине, три стула в комнате…

Числа, описывающие количество единиц в группе, называют **натуральными** (природными). В самом деле, в природе мы не можем наблюдать три с половиной воробьев на ветке или минус шесть коней на лугу. Натуральные числа – все целые положительные числа от единицы, до бесконечности. Пример натуральных чисел – римские цифры. Здесь, все числа положительные целые и нет нуля. Почему древние греки и римляне не знали нуля, и у кого он появился впервые – разговор особый. Мы к нему вернемся позже.

На получение эффекта автоматического различению и распознавания групп по количеству единиц в них и запоминания соответствующего числительного нужно время и немалые усилия. Попробуйте быстро научиться считать по-немецки, по-китайски или по-японски. И не просто произносить по порядку числительные, а быстро отвечать на вопрос, сколько предметов вам показывают.

Итак, главное – не торопиться, ведь ваш малыш уже умеет считать и на вопрос, сколько ему лет, гордо показывает три пальчика!

# Что такое сложение и умножение?

Группы можно объединять. Если группы состоят из одинаковых терминов, то при их объединении получится одна новая группа. Объединение групп с одинаковыми терминами называется *сложением*. Если термины не одинаковые, то новой целой группы не получится. Сложение не происходит.

Если группу из пяти карандашей объединить с группой из двух карандашей, то получится новая группа из семи карандашей. Это – сложение. Причем, неважно, речь идет о группах карандашей, ручек или стульев… Лишь бы это были *группы* *одноименных* объектов.

Сложение значительно ускоряет счет!

Знаком сложения групп служит знак «+» (плюс).

Впоследствии слово группа перестает упоминаться. Так и говорят: «пять плюс два будет семь».

В самом деле, допустим, у нас есть группа из двух карандашей и группа из трех карандашей. Так как и в первой, и во второй группах термины одинаковые, то мы можем объединить эти две группы в одну. Получится новая группа. В ней пять карандашей.

Допустим, у нас есть группа из трех карандашей и группа из двух ручек. Так как термины в группах разные, их объединение не образует новую целую группу. Это – не сложение. Чтобы их сложить в группу, надо подобрать *общий* для обеих групп термин. Стоит нам сказать, что первая и вторая группы состоят из *предметов*, то сложение возможно: получится группа из пяти предметов.

Итак, объединяться в группу могут только одноименные термины. Следовательно, ***сложение*** *– это объединение одноименных групп*.

Мы подошли к очень важному моменту. Вначале нужно добиться понимания и воспроизведения выражения: *к* ***группе*** *из трех карандашей прибавить* ***группу*** *из двух карандашей получится* ***группа*** *из пяти карандашей.*

После того, как ребенок научится свободно это говорить, можно перейти к сокращенному варианту:   
*к* *группе «три» прибавить группу «два» будет группа «пять».*

И наконец, после усвоения данной формулировки, можно перейти к окончательному варианту: *три прибавить два будет пять.*

Результат сложения будем называть ***суммой****.*

Группы, которые складываются, называются***слагаемые****.*

Допустим, у нас есть группа из пяти карандашей. Удалим из нее два карандаша, останется группа из трех карандашей. Это уже вычитание.

*От группы «пять» вычесть группу «два» получится группа «три».*

Окончательная формулировка: *пять вычесть два будет три!*

Итак, удаление группы из группы, называется *вычитанием.*

Результат вычитания называется ***разностью***.

А что же такое умножение?

Рассмотрим последовательное сложение групп с одинаковым количеством единиц в каждой.

Например, к группе «три» прибавим группу «три», потом еще группу «три», потом еще группу «три». У нас сумма одинаковых групп. Одинаковых групп – четыре.

Числительное, обозначающее количество складываемых одинаковых групп, называется «множителем». Т.е. *множитель* обозначает количество одинаковых слагаемых.

Сложение одинаковых слагаемых будем называть*умножением.*

Сумма одинаковых слагаемых (или результат умножения), называется *произведением*.

Выучить наизусть результаты сложения одинаковых слагаемых, означает выучить таблицу умножения. Умножение еще больше ускоряет счет!

В нашем случае, мы сложили четыре равных слагаемых. Т.е. взяли группу «три» четыре раза (четырежды). Результат такого сложения можно запомнить. В следующий раз сумма четырех одинаковых слагаемых по три единицы в каждой, сразу может быть названа группой «двенадцать». Это – *произведением*.

У нас по традиции таблица умножения строится до 10. Но раньше она была до 12 (до дюжины дюжин).

Демонстрацию процедуры умножения, так же как и сложения, и вычитания, удобно проводить с помощью тех же палочек. Предложите ребенку самому продемонстрировать умножения различных чисел с помощью палочек. Это у него легко получится.

Но получится ли у него демонстрация деления?

# Что такое деление?

Сколько будет 8 разделить на 2?

Ребенок сразу ответит: «четыре».

Разложите перед ним восемь палочек и попросите разделить на два. Он, скорее всего, разделит всю группу на две части и скажет, вот – четыре.

А вы спросите, четыре чего?

Оно покажет на одну часть, в которой четыре палочки, и скажет: вот, четыре палочки.

– А в другой части сколько?

– Тоже четыре.

– Значит, сколько всего?

– Восемь.

– Т.е. 8:2=2×4… Значит, восемь разделить на два будет восемь?

– Нет, вот эта одна группа – это четыре.

– Но это – результат вычитания. Если от восьми палочек отнять четыре палочки, то останется четыре палочки. А у нас осталось восемь палочек и две группы… Вот. Отдельно четырех нет. Где у нас результат деления?

Что делать?

Все знают, что если разделить все что угодно на два, то получатся две части. Поэтому восемь разделить на два будет два! Правильно, две части. Но кто-то считает, что будет четыре. Четыре чего? Откуда взялись четыре?

Очень получился занимательный разговор.

Что же такое деление?

Сейчас вы раскроете ему секрет, который окажется вовсе не секретом, а тем, что он и так знал и очень хорошо понимал. И совершенно зря он себе перестал доверять и доверился колдунье!

Восемь разделить на два – это значит разбить (разложить) группу «восемь» на одинаковые слагаемые. На слагаемые по «два». Получатся четыре одинаковых слагаемых по «два».

Ребенок будет в восхищении. Он будет наблюдать за вами как за фокусником или как за волшебником, который вдруг в его битве со злыми колдуньями, пришел ему на помощь!

О чем это я?

Ребенок с самого первого класса знал: все, что угодно разделить на два будет два. А разделить на три – будет три. Значит, восемь разделить на два будет два, а разделить на три будет три. Три части! Но злая «учительница» кричала, что нет! Что он ошибается!! Что он неуч!!! Каким-то немыслимым образом у нее получалось, что восемь разделить на два будет четыре. А на три, – продолжала она кричать, – восемь вообще не делится!

А тут вы говорите такие понятные, простые вещи. Чары колдуньи начинают разрушаться.

Раскладывать группу можно только на слагаемые. Разложение группы на равные слагаемые, называется *делением*.

Величины равных слагаемых, на которые раскладывается делимое, называются *делителями*.

Количество получившихся равных слагаемых (делителей) есть *частное*.

Следовательно, частное обозначает количество делителей, на которое разбивается делимое, или количество получившихся равных слагаемых, или количество получившихся равных частей… Частное.

Таким образом, деление позволяет выяснить, на сколько одинаковых слагаемых можно разбить данную группу. Числительное, обозначающее количество единиц в этих равных слагаемых, называется *делителем*. Арифметическое действие «деление» – описание количества одинаковых слагаемых в данной группе.

Например, двенадцать разделить на три – это значит вычислить, на сколько одинаковых слагаемых по «три» в каждом, можно разбить группу «двенадцать». Получаем, четыре группы по «три», т.е. здесь, частное – четыре.

То, что при делении называется *частным*, при умножении называется *множителем*.

Отсюда ясно, почему нельзя делить на ноль: нельзя разложить данную группу на слагаемые, которых нет!

Положите перед ребенком кучу палочек и предложите разделить ее на «три»[[2]](#footnote-2). На три чего? Конечно на равные группы по три палочки в каждой. Ведь группу палочек можно делить только на группы палочек. На группы ручек или карандашей их делить нельзя. И, конечно, ребенок очень быстро разложит делимое на равные слагаемые по три. Вы должны обязательно выразить восхищение его догадливостью.

В дальнейшем, когда ребенок начнет учить таблицу умножения, предложите ему воспользоваться для счета палочками. Процесс заучивания пойдет гораздо быстрее и интереснее.

Точно так же, когда начнете практику деления двузначных цифр на целое число, вместо таблицы умножения на оборотной стороне тетради в клетку, предложите ребенку использовать те же палочки. Палочки вполне реальны, их можно представить. Постепенно, ребенок научится оперировать уже не реальными палочками, а представляемыми. Операции с ними так же понятны, как и операции с реальными. А таблицу умножения требуется только вызубрить. С нею нельзя производить реально представимых действий.

# Что такое дроби?

Положите перед ребенком семь палочек и спросите, сколько он здесь видит слагаемых? После небольшой заминки он скажет, что, конечно, семь.

Следовательно, разделить нашу группу на единицу, значит получить семь слагаемых по единице. Целая группа «7» состоит семи одинаковых частей. Одна часть будет одной из семи одинаковых.

Одинаковые части целой группы называются *долями*. Следовательно, одна палочка в нашей группе «семь» — одна седьмая доля этой группы.

Теперь, попросите разделить семь палочек на три. Он скажет, что семь на три не делится. Но пусть все же попробует.

Он начнет разбивать группу из семи палочек на группы по три палочки. Получатся два слагаемых по три, и одна палочка осталась лишней. Получился остаток… Это – часть целого слагаемого. Как описать теперь величину этого остатка? Укажите на одну палочку и спросите, какая это доля от группы из семи? Опять замешательство и, скорее всего, помня предыдущий разговор, ребенок скажет, что это — одна седьмая доля.

Но целой группы из семи палочек у нас уже нет. У нас отдельно целые группы по три палочки. И для каждой из них одна палочка — это одна третья доля. Значит, оставшаяся одна палочка тоже — одна третья доля.

Заметьте, что каждый раз при получении остатка, надо выяснить какая это доля от полученного целого слагаемого, а не делимого. А величину слагаемого, на которое делится вся группа у нас называлась *делителем.*

Теперь попросите разделить группу «7» на группы по четыре. Делитель — «четыре». Следовательно, величины равных слагаемых, на которые надо разбить делимое «7» будут равны четырем. Получилось одно целое слагаемое «четыре» и три палочки в остатке. Т.к. целое слагаемое у нас «четыре», то одна палочка теперь уже одна четвертая доля. Следовательно, остаток — три четвертых долей.

Числительное, обозначающее величину и количество долей целой группы, называется *дробью*.

При записи цифры, обозначающие величину доли и их количество, разделяются дробной чертой. Цифра над дробной чертой называется «числитель», а под чертой – «знаменатель». Знаменатель показывает величину доли, а числитель — количество этих долей.

Теперь спросите у ребенка, сколько половинок в целом?

Он задумается.

Спросите, а сколько половинок в целом яблоке?

Я получал на этот вопрос самые разные ответы: от 1 до 8 половинок…

Это нам взрослым все как будто понятно. Дети только-только привыкают к новым терминам.

Итак, после того как выяснится, что половинок все-таки две, покажите как будет обозначаться одна половинка. Это — . Читается: одна вторая (доля). Это будет обозначение половинки. Половинка чего?

Мы знаем, что просто половинки не бывает. Существует только половинка чего-то. В нашем случае – это половинка яблока. В общем случае — половина целой группы или единицы.

Продолжим. Сколько третьих долей яблока в яблоке?

Правильно, три.

А как обозначить одну из этих третьих долей?

Обозначим  (одна третья).

Одна третья чего? Целого яблока.

А сколько четвертых долей яблока содержится в яблоке? Четыре. А как обозначить одну из этих четвертых долей? Обозначаться она будет  (одна четвертая).

Одна четвертая чего? Целого яблока.

А на сколько пятых долей яблока можно разделить яблоко? Конечно, на пять. Значит, одна из этих пяти долей будет обозначаться  (одна пятая).

Одна пятая чего? Яблока.

Можно продолжать этот счет до тех пор, пока ребенок окончательно не поймет, что такое доли целого и как они обозначаются? И здесь очень важно объяснить, что просто отдельных дробей не бывает. Нет просто «двух третьих»! Есть только две третьи чего-то.

Если мы записали дробь , то это означает не просто три пятых, а три пятых от чего-то. В данном случае, три пятых от одной целой, т.е. от единицы. Предполагается, что изначально запись была такой: . Но единицу мы не пишем.

Вернемся от яблок к палочкам. Разделим группу «восемь» палочек на группы по «три» палочки. Получатся две целые группы «три» и две палочки в остатке. Как обозначить остаток. Так как, мы делили на группы по три, то одна целая получившаяся группа состоит из трех палочек. Следовательно, одна палочка у нас играет роль одной третьей доли. В остатке у нас две палочки, следовательно, остаток – две третьих.

Теперь, разделим 8 на 5. Получилась только одна целая группа. Она состоит из пяти палочек. Следовательно, одна палочка теперь играет роль одной пятой доли. В остатке у нас три палочки, т.е. – три пятых.

С долями группы, т.е. с дробями, можно проводить те же арифметические действия, что и с целыми группами. Их можно складывать, вычитать, умножать и делить. Главное, чтобы доли были *одинаковыми*! Только в этом случае они образуют свои группы, которые можно складывать.

Итак, складывать и вычитать можно только одинаковые по величине доли. Количество долей показывает числитель. И опять напомним, что доли — это равные части.

# Сложение дробей

Сколько будет, если к одной пятой (доле) прибавить еще одну пятую. Ясно, что получится группа из двух пятых долей, т.е. две пятых или .

Сколько пятых долей яблока получится, если к одной пятой доле прибавить еще две пятых? Конечно, три пятых долей.

+= .

Теперь можно порешать «примеры»:













Точно так же можно вычитать из дроби дробь











Все легко и понятно.

А теперь огорошьте ребенка вопросом, а сколько будет, если от единицы вычесть одну четвертую долю.

Ребенок задумается.

Спросите сразу, а сколько четвертых долей в единице? Помогите догадаться, что единица – это целая группа и ее можно разбить на любое количество долей. В данном случае, отнимаем одну четвертую долю. Следовательно, надо вначале разбить единицу на четыре доли. Получатся четыре четвертых доли.

А сколько отняли? Одну четвертую долю.

А сколько осталось? Три четвертых долей!

Так и запишем.

1 – =–=

А сколько будет, если от единицы вычесть две седьмых?

А сколько седьмых в единице? Правильно, семь седьмых. А сколько отняли? Две седьмых. А сколько осталось? Пять седьмых.

1 – =–=

А сколько будет, если от единицы вычесть пять девятых?

А сколько девятых в единице? Девять. А сколько отняли? Пять. Сколько осталось? Четыре! Четыре девятых.

1 – =–=

Обратите внимание ребенка на то, что каждый раз при вычитании дроби от единицы, мы как бы вычитаем числитель от знаменателя!

Порешайте еще примеры:



















Опять все легко и просто!

Усложните задачу. Спросите, а сколько будет, если от двух вычесть три седьмых?



Ребенок опять задумался.

Это хорошо, что задумался. Надо, чтобы он как можно чаще задумывался, распознавая новый вид задач. И надо, чтобы он как можно чаще сам находил решение. Это научит его не бояться новых задач.

Разложим две целые на единицу и единицу. Из одной единицы вычтем три седьмые доли, получатся четыре седьмые, и прибавим вторую единицу, получится одна целая четыре седьмых.



Давайте, еще.



Придумайте еще с десяток примеров…

А еще лучше, пусть он вам составит несколько примеров и проверит, правильно ли вы их решили.

Очень хорошо!

Теперь проверим, насколько хорошо ребенок понимает, что он делает.

Повторим дроби с самого начала. Предложите ему еще раз продемонстрировать сложение и вычитание дробей на палочках. Скорее всего, он воскликнет, что на палочках этого сделать нельзя, т.к. палочки целые. Даже попытается разломить палочку на кусочки…

Остановите его и напомните, что речь идет о группах. А дроби обозначают величину и количество долей целой группы. Целая группа может состоять из любого количества палочек, и каждая палочка есть доля целой группы. Поэтому нет необходимости ломать палочку на части. Можно заранее собрать группу уже разбитую на необходимое количество долей (палочек).

Например, разложите на столе четыре палочки. Соберите их в вместе и скажите, что это одна целая группа, т.е. это — единица. (Рис. 5).

Если четыре палочки – это одна целая группа (единица), то, что собой представляет отдельная палочка? Конечно, – четвертую долю от целой группы (единицы). Т.е., в данном случае одна палочка играет роль уже не единицы, а одной четвертой доли от единицы.

1 (целая группа)   



Как теперь продемонстрировать сложение дробей?

Очень просто. К одной четвертой (1 палочка) добавим еще одну четвертую, получим две четвертые. Добавим еще одну – получим три четвертые.

А как показать одну пятую?

Возьмем группу из пяти палочек и скажем, что это одна целая группа. Тогда, одна палочка будет одна пятая доля от этой группы.

Конечно, можно было пожертвовать палочкой, разломать ее на доли и демонстрировать дроби… Но, жалко ломать. И потом, в этом случае ребенок привыкает, что дробь – это доля только единицы. В дальнейшем придется приложить немало усилий, чтобы научить его брать дробь не только от единицы, но и от произвольного числа.

На самом деле, дробь обозначает величину и количество долей данной группы.

Предложите еще раз разделить группу из восьми палочек на слагаемые по два (восемь разделить на два). У него получатся четыре слагаемых по два.

Каждая получившаяся группа есть четвертая доля от начальной группы «восемь».

А как обозначить, какую долю это составляет от группы «восемь»? Конечно, дробью 

Одна четвертая чего? Конечно, группы «восемь».

Сколько всего четвертых долей в группе «восемь»? Четыре четвертые доли.

Итак, восемь разделить на два будут четыре слагаемых по два.

А теперь попросите разделить восемь на три…

Группу «восемь» раскладываем на одинаковые слагаемые «три». У нас получаются два целых слагаемых «три» и одно нецелое слагаемое, в котором только две палочки.

Спросите, а сколькой должно было быть палочек в последнем слагаемом? Он скажет – три. А сколько имеем? Только две. А как эту нецелую группу назвать? Так и назовем – две третьи доли.

Итак, у нас получились два целых слагаемых по три и две третьи этого слагаемого или «два целых два третьих». Это *смешанное число*. В нем одновременно есть и целая, и дробная части. Они смешались…

С другой стороны, каждая целая группа у нас состоит из трех палочек. Как назовем одну палочку? Правильно, – одна третья. Сколько всего таких палочек в «двух целых двух третьих»? Верно, восемь. Восемь каких? Третьих.

Т.е. .

Здесь, числитель больше знаменателя.

Дроби, у которых числители больше знаменателей, называются *неправильными дробями.*

Теперь поупражняйтесь в делении чисел на палочках, получении смешанных чисел и переводу смешанных чисел в неправильные дроби и наоборот. Вы уже знаете, как это делать. У вас получится.

Например, как вычислить, чему равна разность



Ребенок скажет, что от двух седьмых нельзя отнять пять седьмых. Верно. Но, от единицы можно. Будет одна седьмая. И у нас осталось еще две седьмых. Значит, всего будет – три седьмых.

Или разобьем одну целую на семь седьмых и добавим к двум седьмым. Будет девять седьмых. От девяти седьмых отнять шесть седьмых будет три седьмых.



Интересно будет наблюдать, как ребенок, вычисляя дроби, будет проверять решение, используя счет на палочках.

# Как складывать дроби с разными знаменателями?

Когда ребенок будет в полной уверенности, что теперь-то он все может, дайте ему следующее:

+=

Некоторые дети задумаются, а некоторые смело напишут .

Прежде всего, надо напомнить, что складываются и вычитаются только одинаковые доли. В последнем примере доли не одинаковые.

Как к одной второй доле прибавить одну третью?

Нарисуйте на листе бумаги половину яблока и третью долю яблока. Покажите, что они разные по величине и что в результате сложения получится нечто, что сразу и не опишешь. Т.е. опять получаются одна вторая и одна третья доли.







Разные по величине доли не складываются в одну группу. Точно так же, как не складываются в одну группу предметы с разными названиями (терминами).

Что делать?

Напомните, что для объединения двух групп с разными терминами в одну группу, мы подбирали для них общий термин.

Так же поступим и с разными долями. Подберем для них общую долю. Т.е. долю, которая поместилась бы в обе наши неравные доли целое число раз.

Вначале спросите, какая доля меньше: одна вторая или одна третья?

Дети часто говорят, что одна вторая меньше. Когда убедитесь, что все-таки одна третья меньше, предложите ее в качестве общей доли.

Справа целое разбито на три доли. Слева – на две. Если слева тоже разбить на три доли, видно, что эти новые три третьи доли не разделятся поровну между старыми двумя вторыми.

Значит, одна третья не может быть здесь общей долей.

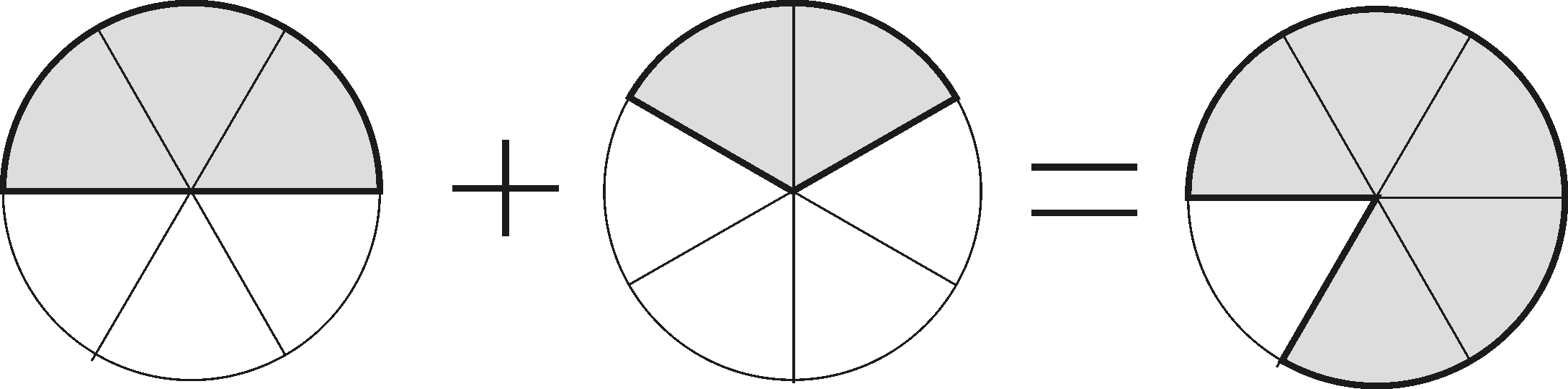
Разделим справа одну третью долю на два. Получатся два шестых долей. Почему? Третьих долей в целом у нас три. Если каждую разделить пополам, получатся шесть долей целого. По две на каждую третью.

Может шестая доля и есть общая доля?

Разделим левое целое на шесть. Получим тоже шесть шестых долей. Новые шестые доли распределятся между старыми вторыми долями поровну – по три шестых. Это как раз то, что нужно!

Теперь для одной второй и для одной третьей имеем общие доли. Это – шестые доли.







В одной второй содержатся три шестых доли, а в одной третьей – две шестых. Всего – пять шестых долей!

Следовательно,

+= .

Вот такой, несколько странный, результат.

Тем не менее, это верный результат.

Но, не будем же мы каждый раз рисовать кружочки при сложении разных долей.

Нет, конечно. Для сложения (и вычитания) дробей с разными знаменателями нашли более простой способ.

Рассмотрим еще раз запись нашей суммы:

+=.

Одна третья доля меньше одной второй доли. Три третьи доли нельзя распределить между двумя половинками, т.е. три на два не делится. Значит, третья доля не может быть общей. Разделим третью долю на два, т.е. умножим больший знаменатель на два. Получим шестые доли. Шесть шестых можно разделить между двумя вторыми. Т.е. на каждую вторую долю приходятся по три шестых. Следовательно, одна шестая доля и есть общая доля. Шесть делится и два, и на три.

+== .

Рассмотрим еще пример.

 +  =

Здесь меньшая доля – одна восьмая. В одной целой – восемь восьмых долей. Их нельзя поровну распределить между шестью шестыми долями. Т.е. восемь не делится на шесть.

Умножаем восемь на два (т.е. уменьшаем вдвое восьмую долю). Получаем шестнадцатые доли. Шестнадцать шестнадцатых тоже нельзя распределить поровну между шестью шестыми долями. Шестнадцать не делится на шесть.

Умножаем восемь на три (т.е. уменьшаем восьмую долю в три раза). Получаем двадцать четвертые доли. Двадцать четыре двадцать четвертых долей можно распределить между шестью шестыми долями. Двадцать четыре на шесть делится. Получатся по четыре двадцать четвертых долей на каждую шестую долю. А на каждую восьмую долю приходятся, конечно, по три двадцать четвертых долей.

Следовательно, наибольшая доля, которая вмещается целое число раз в одну восьмую и в одну шестую, будет двадцать четвертая доля.

Эта общая доля называется наименьшим общим знаменателем.

Получим



Давайте, еще.

 +  =

Пять на три не делится. Умножаем пять на два, получаем десять. Десять на три не длится. Умножаем пять на три, и получаем пятнадцать. Пятнадцать на три делится. Это – общий знаменатель, следовательно, общая доля будет пятнадцатая.

 +  = 

Чтобы получить одинаковые знаменатели в первой и во второй дробях, нужно в первой дроби числитель и знаменатель умножить на три, а во второй – на пять. Для удобства, запишем их как дополнительные множители:

 +  = 

5*)*

3*)*

или

3*)*

 +  = = 

4*)*

Вычислите.



















Итак, мы научились складывать и вычитать обыкновенные дроби.

# Как умножать дроби?

Вспомним, что значит умножить число на число?

Например, 3 умножить на 6 – это значит нужно взять шесть одинаковых слагаемых по три. Будет 18. Понятно.

А что значит  умножить на 6?

Скорее всего – то же самое. Нужно взять двенадцать равных слагаемых по три четвертых.



Следовательно, для того, чтобы умножить дробь на число, числитель дроби надо умножить на это число. Получится восемнадцать четвертых.

А что значит 6 умножить ?

Здесь множитель – три четвертых. Это значит нужно взять слагаемое шесть… сколько раз? Три четвертых раза. А как это делать? Как взять три четвертых раза? Взять один, два или три раза – понятно как: надо умножить. А три четвертых раза? Тоже надо умножить. А как? Как это продемонстрировать на палочках?

Вот у нас на столе шесть палочек. Умножить на три – значит взять три равных слагаемых по шесть. Получится восемнадцать палочек. Это – понятно.

Теперь, как умножить шесть палочек на три четвертых? Умножить на три четвертых – значит взять три четвертых слагаемых по шесть. А как это понять?

Вначале попробуем понять, что значит взять одну четвертую раза слагаемое шесть. Скорее всего, это взять одну четвертую от шести.

У нас появился новый термин – «взять». Что он означает?

Мы знаем, от шести целых отнять одну четвертую будет пять три четвертых. Т.е.,

6 – 

А сколько будет, если от шести целых *взять* одну четвертую?

Кажется, что нет разницы между «взять» и «отнять». Но, это только кажется.

При вычитании получается разность. Т.е. мы должны назвать количество, которое остается после вычитания.

А взять одну четвертую от шести – это значит, мы должны назвать количество, которое взяли…

Сколько и чего мы взяли?

Мы уже отмечали, что дробь  означает не просто одна четвертая, а одна четвертая чего-то. В данном случае, одна четвертая от единицы. Предполагается, что изначально запись была такой: . Единицу просто не пишем.

Следовательно,  от 6 единиц будет в 6 раз больше. А это не что иное, как умножение:

.

Итак, мы вычислили, сколько четвертых долей получится, если взять одну четвертую доли от шести. Получилось шесть четвертых долей.

Попробуем сделать то же самое с помощью палочек. Как показать одну четвертую, мы уже знаем. Берем группу из четырех палочек – это одна целая группа, состоящая из четырех четвертых долей. Отделим три четвертых долей. Остается одна четвертая. Теперь таких долей надо взять шесть… Получится шесть четвертых.

Соответственно, если взять три четвертых от шести, результат будет в три раза больше – восемнадцать четвертых.

Итак, мы выяснили разницу между «отнять» и «взять». Чтобы взять дробь от числа, нужно умножить эту дробь на это число.

Следовательно, умножить целое число на дробь, значит взять дробь от числа.

А как умножать дробь на дробь?

Например, как умножить три четвертых на пять седьмых. Это значит, три четвертых надо взять от пять седьмых.

Чтобы вычислить одну четвертую от пяти седьмых нужно разделить пять седьмых на четыре. А как делить дроби?

# Как делить дроби?

Как делить число на дробь? Например, что значит шесть разделить на одну вторую?

Как мы уже знаем, деление – разложение группы на равные слагаемые. Самый простой способ – это последовательное вычитание равных групп с одновременным их счетом…

В нашем случае будем последовательно вычитать группу «одна вторая» из группы «шесть» и сосчитаем, сколько равных слагаемых получится. У нас получатся двенадцать равных слагаемых по одной второй. Частное – двенадцать.

6 :  = 12.

Для удобства вычислений, вспомним, деление – действие обратное умножению. Следовательно, можно заменить знак деления на знак умножения и делитель на число, обратное делителю. Результат будет тем же.

6 :  = 6 12.

Соответственно, шесть разделить на слагаемые по три четвертых будет… В единице – четыре четвертых. Значит, в шести целых содержатся двадцать четыре четвертых. Разделить их на группы слагаемых по три… получатся восемь групп, т.е.

6 :  = = 8.

А как разделить одну вторую на шесть?

Вспомним полную формулировку: группу «одна вторая» разделить на группы по «шесть». По «шесть» чего? По шесть целых. Но целая группа «шесть» не помещается в группу «одна вторая».

А какая ее доля помещается?

В одной целой — две вторых. Следовательно, в шести целых — двенадцать вторых. Значит, в одну вторую помещается двенадцатая доля от шести, т.е. одна двенадцатая.

Итак, если попытаться разделить группу «одна вторая» на группы по шесть получится двенадцатая доля группы «шесть».

Но каждый раз вычислять сколько раз какая-то доля группы целых помещается в какую-то долю целого…. Довольно сложно получается.

Выход был найдет. Помог анализ записи действия с помощью цифр. Например,

 : 6 =  = 

Точно так же делим дробь на дробь. Умножаем дробь на знаменатель и делим на числитель. Получится знаменитое «переворачивание».

 :  = = 

# Что такое десятичные дроби?

Выяснилось, что все дроби со знаменателями 10, 100, 1000 и т.д., удобнее записывать в новом виде, отделяя целую часть от дробной просто запятой. При этом в дробной части не записывается знаменатель, а записывается только числитель.

А как мы узнаем, каким был знаменатель?

Решили, что количество знаков после запятой должно соответствовать количеству нулей в знаменателе.

Например,

Дробь, записанную в новом виде, назвали десятичной. Выполнять арифметические действия с десятичными дробями гораздо удобнее, чем с обыкновенными.

Например, сложение и вычитание. Здесь, не надо подбирать общий знаменатель. Главное, чтобы при сложении в столбик целая часть десятичной дроби была под целой, а дробная – под дробной, т.е., чтобы запятая всегда была под запятой:

23,456

2,231

21,225

23,456

2,2 .

25,656

13,45

0,27

13,18

0,406

52,03 .

52,436

А как умножать десятичные дроби?

Вначале просто перемножаем числа, не обращая внимания на запятые. В произведении отсчитываем справа налево столько знаков, сколько в обоих множителях вместе, и ставим запятую. Везде, где не хватает знаков, ставим 0.

Например,

23,4

3,1

234

702 .

72,54

5,34

0,11

534

534 .

0,5874

0,204

0,3

0,0612

0,004

7

0,028

И, наконец, деление.

Вначале делим десятичные дроби, не обращая внимания на запятые. В полученном частном отделяем справа налево столько знаков, столько их в делимом после запятой и ставим запятую, потом ее же переносим слева направо на столько знаков, сколько их в делителе после запятой. Везде, где не хватает знаков, ставим 0.

32,7 : 0,03=1090,0; 0,327 : 0,3=1090,0

Эту процедуру можно упростить. Вначале в делителе переносим запятую направо, пока не получится целое число. Потом, на столько же знаков переносим направо запятую в делимом. Дальше, делим как обычно.

Вычислять дети научатся быстро. Но наша задача на этом этапе, научить детей математическому языку. Пусть ребенок попробует воспроизвести весь приведенный текст. Он знает, что говорить, он знает, как говорить. Но сможет ли он свободно говорить?

# А как перевести десятичную дробь в обыкновенную и наоборот?

Очень просто: пишем так, как слышим.

Например, как перевести 0,7 в обыкновенную дробь? Здесь семь десятых.

Так и пишем: , т.е. 0,7=

Еще. Дробь 4,13 – это четыре целых тринадцать сотых. Значит, так и пишем: , т.е. 4,13=.

А как перевести обыкновенную дробь в десятичную? Тоже просто. Ведь мы умеем делить и записывать частное в виде десятичной дроби. Значит, надо просто разделить числитель на знаменатель.

Например,

 или 

Вычислим значение выражения



1-ый вариант – переведем дроби в десятичные:



2-ой вариант – переведем дроби в обыкновенные



# Что такое проценты?

Из множества десятичных дробей выделили дроби, обозначающие сотые доли. Их назвали процентами. От латинского *per cent* – «на сотню; сотая».

Кратко процент обозначается значком «%». Этот значок буквально означает «разделить на сто». Поэтому при вычислениях, значок процента «%» делитель 100 или на множитель 0,01.

Например, 5% = 5/100=0,05 или 5%=5‧0,01 = 0,05.

Процент от числа вычисляется так же, как и любая дробь от числа. Нужно умножить сотую долю на число.

Например, как вычислить 3% от 4, т.е. как вычислить три процента от четырех?

Запишем это же задание на языке математики, заменив слово «процент» на слово «сотых». Получим:

0,03‧4 = 0,12

Как решать простые задачи на проценты?

Например, какая будет цена товара после скидки в 20%, если товар стоил 3200 руб.?

Надо вначале вычислить величину скидки в рублях, т.е. надо вычислить, сколько будет двадцать процентов от трех тысяч двухсот. Так и запишем:

0,20‧3200= 640 (руб.)

Новая цена будет на эту сумму меньше, т.е.

3200–640 =2560 (руб.)

# Как переводить текст задачи на язык математики?

Если перед ребенком положить группу из трех палочек и группу из пяти палочек и спросить, в какой группе палочек больше, он, конечно, легко покажет, что в группе из пяти палочек их больше. Но вот сможет ли он это записать цифрами?

Некоторые дети уже знают знак «больше» или «меньше» и смело напишут: 5 > 3 или 3 < 5.

Если ребенок это запишет, конечно, надо его похвалить и тут же спросить: а на сколько группа «5» больше, чем группа «2»? Скорее всего, он сразу ответит, что на три.

А как это теперь записать?

Некоторые дети начинают записывать так:

5 > 3 на 2…

Попросите его записать это выражение, не используя предлоги, не используя русский язык, а используя только язык математики: только цифры и знаки. Это уже вызовет затруднение.

Все числительные связаны друг с другом. Ведь они все — термины, обозначающие количества единиц в группах. Знак равенства обозначает эту связь. Этим и воспользуемся: «пять» связано с «два», но больше на «три». Эта строка может быть записана цифрами очень просто: 5=2+3.

А как записать, что «шесть» меньше, чем «девять» на «три». Здесь уже ребенок сам быстро запишет: 6 = 9–3.

Научите читать цифровые выражения подобным образом. Это очень пригодится при решении задач. Ведь в большинстве случаев при решении задач надо просто перевести ее текст с русского языка на язык математики.

Попросите теперь прочитать тремя способами выражение: 7 = 2 + 5.

Должно получиться:

1) «семь» равно «два» плюс «пять»;

2) «семь» связано с ««два» и больше на «пять»;

3) «семь» больше, чем «два» на «пять».

Проговаривание этих фраз очень важно. Предложите ребенку самому составить цифровые записи и прочитать их тремя способами.

Теперь можно перейти к следующему этапу. Как записать цифрами, что «12» больше, чем «4» в «три» раза.

Скорее всего, ребенок уже догадается, и смело напишет: 12 = 4 · 3. То есть, «двенадцать» связано с «четыре» и больше в «три» раза.

А как записать, что «8» меньше, чем «16» в «два» раза?

Это уже и вовсе не вызовет затруднений.

Конечно, 8 = 16 : 2. Или: «восемь» связано с «шестнадцать», но меньше в «два» раза.

Не пожалейте времени и поупражняйтесь с ребенком в переводе с языка математики на русский язык и наоборот. После подобного тренинга, вычислительные задачки будут решаться очень легко.

# Что такое формула?

Мы научились наблюдать, описывать наблюдаемое, строить определения, присваивать им термины, измерять, различать группы и считать.

Что дальше?

Не забываем, что каждый следующий шаг должен быть серьезно мотивирован. Ребенок должен понять необходимость следующего шага, иначе он его не сделает.

Итак, начертим известную окружность.

Проведем хорду через центр окружности. Это – *диаметр*.

Соединим точку окружности с ее центром – это *радиус*.

Размеры радиуса и диаметра можно измерить. Пусть ребенок измерит их линейкой. Это легко.

Проделаем то же самое с другой окружностью. Сравним два диаметра. Они различаются по размеру. Тем не менее, это диаметры. Термины совпадают, а размеры отличаются.

Термины не различают размеры.

Обозначим буквой ***d*** длину диаметра, а буквой  
 ***r*** – длину радиуса. Это – *параметры*.

Для первой окружности длина его диаметра будет ***d1,*** а для второй – ***d2.*** И так для любого диаметра любой окружности: общее обозначение длины диаметра будет сохраняться (***d***), меняться будут только индексы. Напомним, что ***d*** и ***r*** – это параметры.

*Параметр* – *буквенное обозначение величины.*

А *величина* – результат счета или измерения.

Теперь обратим внимание на то, что диаметр состоит из двух радиусов. Следовательно, можем записать:

***d*** *=* ***2r.***

Это наша первая формула!

И не надо опасаться, что ребенок еще мал для освоения формул. Дети с третьего класса спокойно оперируют параметрами. Т.е. уже разбираются в алгебре.

Итак, что такое формула?

*Формула* – это параметрическая запись связи между величинами или просто *связь между параметрами*.

Для чего она нужна?

Формула позволяет производить вычисления.

Что такое вычисление?

*Вычисление* – это получение значения параметра не измерением, а с помощью его связей с другими параметрами.

Например, если мы измерили длину радиуса, то нет необходимости измерять длину диаметра. Можно ее вычислить, т.е. получить, умножив длину радиуса на два.

Слишком просто. Зачем вычислять длину диаметра, если и его тоже можно измерить? Измерять даже интереснее…

Так, или примерно так может сказать ваш ребенок.

Вы с этим, конечно же, согласитесь.

В самом деле, можно ли длину хорды измерить линейкой?

Можно.

Можно ли длину диаметра измерить линейкой?

Можно.

Длину радиуса?

Тоже можно.

А можно ли измерить линейкой длину окружности?

Нет!

А что делать?

Обозначим буквой ***с*** длину окружности. Латинской буквой ***с*** – первой буквой в английском слове *circle* – круг, окружность. Итак, линейка – прямая, а окружность – кривая. Линейкой не измерить. А что кроме линейки нужно ребенку, чтобы измерить длину окружности.

Если он догадается сказать, что нитка, то – великолепно.

Можно проложить вдоль длины окружности нитку, потом ее вытянуть и измерить линейкой. Длина нитки будет равна длине окружности.

Но, во-первых, измерения будут не совсем точными. Во-вторых, не всегда нитка может помочь… Что делать?

Мы знаем, что на длине диаметра помещается два радиуса. А сколько длин диаметров помещается на длине окружности?

У нас есть измеренное с помощью нитки значение длины окружности. Разделим его на измеренное значение диаметра той же окружности. Получится примерно 3. Можно проделать то же самое с окружностями разных размеров: ответ будет один и тот же. В самом деле, на длине *любой* окружности умещается примерно три длины ее же диаметра. Если быть точнее — 3,14 диаметра. А если еще точнее — 3,141592653589793238462643... Округленно – 3,14.

3,14 – знаменитое число. Его назвали **числом *π***(пи).

Следовательно, **с = *πd.***

*Число* ***π*** *равно длине окружности единичного диаметра* или *длина окружности, приходящаяся на единицу длины диаметра.*

Это значит, что достаточно хлопотное измерение длины окружности можно заменить достаточно простым измерением его диаметра и умножением результата на число *π* (на 3,14). Мы *вычислили* значение длины окружности с помощью *измерения* его диаметра.

Но измерить длину радиуса легче, чем измерить длину диаметра. Чтобы измерить длину диаметра, нужно совместить с линейкой три точки – две точки окружности и его центр, а для измерения длины радиуса – достаточно совместить только две. Но мы знаем, что ***d*** *=* ***2r***.

Следовательно, **с = *2πr.***

Это и будет формула длины окружности.

*Формула позволяет вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко.*

Попросите ребенка повторить последнее выражение. Обнаружится, что он это не сумеет сделать Добейтесь, чтобы он выучил это выражение наизусть и произносил без запинки. Добиваться, конечно, нужно не принуждением. Все получится само собой. Ведь ребенок понял, что именно нужно сказать: длину диаметра легко измерить, а длину окружности – нет. Формула позволяет… Он сам будет в некоторой растерянности от того, что у него не получается сказать вслух то, что так легко складывается в голове. Как только он запнется, просто улыбнитесь и попросите повторить еще раз. А еще можно взять секундомер и устроить соревнование: кто быстрее всех и без ошибок повторит все предложение.

Формула не освобождает от необходимости измерять. Но она позволяет заменить трудное или невозможное измерение более простым измерением и вычислением. Формула – верный друг и помощник. Постарайтесь, чтобы и для вашего ребенка она стала другом и помощником, а не пугалом…

Дайте ребенку старый компакт диск и линейку. Пусть выяснит, чему равна дина окружности этого диска. Понаблюдайте за тем, что и как он измеряет. Потом пусть запишет формулу. Потом пусть в формулу вставит измеренное значение длины диаметра. И пусть вычислит длину окружности. У него получится *c=*37,68 см.

Теперь спросите, измерил ли он длину окружности? Он ответит, что да!

Поправьте его. Он не измерял длину окружности. Он измерил длину диаметра. А длину окружности – он *вычислил*.

Очень важно с самого начало показать различие между *измерением* и *вычислением*.

# Что такое задача?

Да, «примеры» дети решают. Примеры – это термин такой, детский… Что за примеры?, чему примеры? – они не знают, но решают. А вот задачи – это слишком сложно. Задачи дети не любят. Не любят, потому что не понимают, что от них требуют. А мы попробуем понять.

Вначале рассмотрим задачу, где, прежде всего, нужно понять, что именно требуется вычислить.

«*На сколько этажей нужно подняться на лифте, чтобы оказаться на 7-ом этаже*?»

Дети часто отвечают, что нужно подняться на семь этажей. Но если подняться на семь этажей, то на каком этаже окажемся? Конечно на 8-ом. А нам нужно на 7-ой.

Теперь рассмотрим задачу с простым вычислением.

«*Между этажами девятиэтажного дома по 3 метра. На сколько метров надо поняться на лифте, чтобы оказаться на 6-ом этаже*?»

Мы уже знаем, что подняться надо на 5 этажей, чтобы оказаться на 6-ом. Следовательно, надо подняться на 15 метров.

Еще задачка.

«*В одну лодку помещается 8 человек. Какое минимальное количество лодок нужно, чтобы разместить 43 человек*?»

Ясно, что людей нужно разбить на группы по 8. Для каждой группы – одна лодка. Делим 43 на 8 и получаем 5 групп по 8 и еще остаются 3 человек.

Значит, нужно пять лодок для пяти групп по восемь человек и еще одна лодка для трех человек. Всего нужно 6 лодок.

Возьмем задачку посложнее.

*«В одной кассе продали на 30 билетов меньше, чем в другой. По сколько билетов продали в каждой кассе, если всего было продано 480 билетов?»*

Умудренный опытом обыватель скажет, что, если касс было две, то нужно поделить пополам общее количество билетов, потом от одной половины взять 15 и добавить ко второй, т.е.

480:2=240.

240 – 15 = 225 – билетов продано в 1-ой кассе.

240 + 15 = 255 – билетов продано во 2-ой кассе.

Но ребенок расстроен.

– Учительница, – скажет он, – не примет такое решение. Нужно решение по правилам.

Ваши возражения, что главное решить задачу, а каким методом – это не важно, его не утешат.

Что делать? Мы только помним, что это – так называемые «с иксами задачи». Т.е. что-то обозначаем буквой *х* и составляем «пример», который уже решать умеем…

Давайте попробуем.

Пусть в первой кассе продали *х* билетов. Тогда во второй – продали на тридцать больше, т.е. (*х+30*) билетов. Всего было продано 480, что и запишем:

*х*+(*х*+30) = 480

Решаем «пример», т.е. уравнение:

2*х*+30 = 480.

Вычтем 30 из левой и правой частей.

2*х*+30 = 480;

–30 –30

2*х* + 0= 450

Теперь разделим обе части уравнения на 2.

2*х* = 450

2 2

*х* = 225

225 – это билеты, проданные в 1-ой кассе.

*х*+30 = 225+30 = 255 – это билеты, проданные во 2-ой кассе.

– А мы не умеем вычитать и делить уравнения, –скажет вам ребенок.

Да. В самом деле. В традиционной школьной системе применяют метод переноса переменных из одной части уравнения в другую с соответствующим изменением знаков… Что означает перенос и почему меняется знак, для большинства так и остается загадкой.

Но тут есть еще загадки. Спросите его, а что такое уравнение?

# Как решать уравнения?

– Что такое уравнение?

– Уравнение – это, где икс!

– А что такое икс?

– Это – неизвестное.

– Значит там, где неизвестное, там уравнение? Понятно. А что значит решить уравнение?

– Значит, найти неизвестное икс.

– Как же мы его найдем, если оно неизвестное?

– Ну, найти, чему равен икс…

– Где будем искать?

– …Вычислить икс!

– Как это сделать? Ведь именно об этом и был вопрос.

Наш ребенок в затруднении. Значит, надо прежде выяснить, откуда берутся уравнения и что значит их решить?

Мы уже знаем, что такое *величина*, *параметр* и *формула*.

Величина – результат измерения или счета. Параметр – буква, обозначающая величину. Формула – связь между параметрами.

Остается добавить новый термин – *уравнение*.

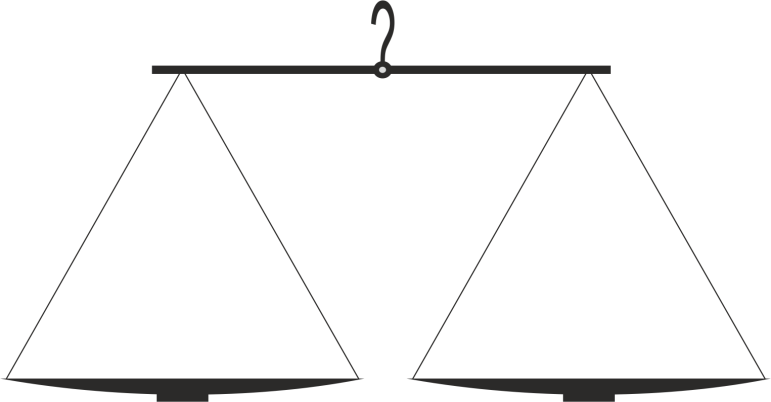
Уравнение – это та же формула или связь между формулами. Знак равенства делит формулу на две части. Они равны друг другу – уравнение.

Наш добрый старый метод позволяет вычислить значение одного параметра с помощью его связей с другими параметрами, т.е. с помощью формулы и или связей между формулами (уравнения).

При вычитании из обеих частей уравнения одинаковых величин, равенство частей сохраняется. При делении обеих частей на одинаковые величины – равенство сохраняется. При сложении и умножении – тоже!

Решить уравнение, значит с помощью последовательных арифметических действий добиться, чтобы в одной части уравнения остался бы параметр, который надо вычислить, а в другой его части – только параметры, величины которых известны.

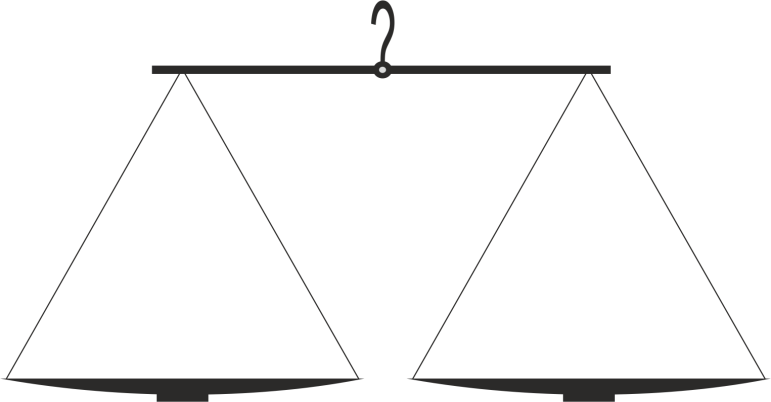
Проиллюстрировать это можно с помощью старинных весов. Чему равна масса одного яблока, если все три яблока совершенно одинаковы и весы находятся в равновесии? (Рис. 8).

гирягирягирягирягирягиря



Здесь масса яблока неизвестна, а массы гирь –известны. Как сделать так, чтобы на одной чаше весов осталось только яблоко, а на другой только гири? Пусть ваш ребенок подумает.

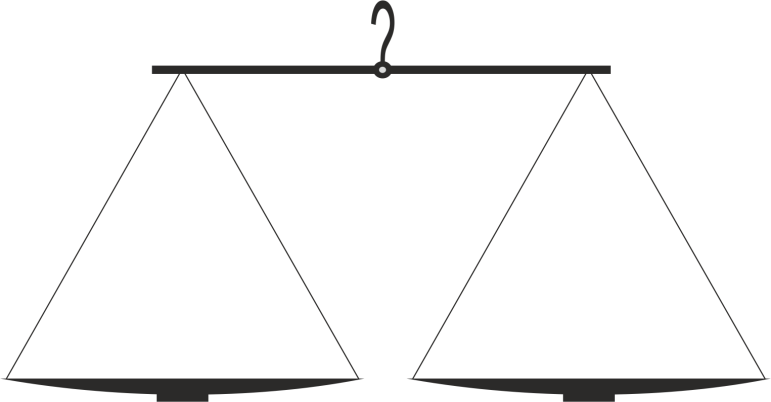
Яблоки должны остаться только слева или только справа. Справа их меньше. Снимем с правой чаши яблоко. Равновесие нарушится. Чтобы ее восстановить, надо убрать ровно столько же яблок и слева. (Рис. 9).

гирягирягирягирягирягиря





На левой чашке должны остаться только яблоки. Значит надо убрать слева гири. Снимем все 100 *г*. Равновесие опять нарушится. Чтобы его восстановить, надо снять 100 *г* и справа.

гирягиря

гирягирягирягиря

На левой чаше осталось два яблока. Нам нужно взвесить только одно. Можно было бы снять одно яблоко слева. Но тогда надо снять одно яблоко и справа. Но там яблок нет. А сколько нужно снять справа гирь, чтобы восстановить равновесие, мы не знаем. Ведь масса яблока пока неизвестна. Но мы знаем, что можно разделить обе части на два. Получится, что масса яблока равна 50 *г*.

При решении уравнения тоже, в левой части должен остаться наш искомый *х*, а в правой – известное число…

– Это уже лучше, – скажет ребенок. – Но как правильно записать решение уравнения?

Это просто! Ведь уравнения и появились как запись действий с весами.

Запишем последовательно все наши действия с помощью уравнения.

3*х*+100 = *х*+200

– *х*  –*х .*

2*х* +100= 200

–100 –100

2*х* = 100

2 = 2

*х*  = 50 (*г*)

Приведенное выше уравнение – относительно простое. И дается оно не столько для ее решения, сколько для демонстрации *метода*, которым решаются все уравнения.

# Как решать задачи?

В самом деле, *метод* – это великая сила.

А есть ли универсальный метод решения вычислительных задач. Есть. И он годится для решения задачи и по геометрии, и по математике, и по физике…

Ребенок насторожился. Ему очень нужен этот метод. Но он пока не верит, что такой метод вообще существует. Слишком хорошо, чтобы быть правдой!

Решим предыдущую задачу другим способом. Напомним ее содержание.

*«В одной кассе продали на 30 билетов меньше, чем в другой. По сколько билетов продали в каждой кассе, если всего было продано 480 билетов?»*

Обозначим параметром *а* – количество билетов, проданных в 1-ой кассе.

Обозначим параметром *в* – количество билетов, проданных во 2-ой кассе

Обозначим параметром *с* – количество билетов, проданных в обеих кассах.

Выпишем в первый столбик все параметры, встречающиеся в задаче: *а, b, с*.

Во втором столбике запишем связи между этими параметрами, т.е. формулы:

По условию задачи:

*а+b=с*;

*b=* *а+30*.

В третий столбик запишем связь между этими формулами – уравнение. Здесь, они связаны, например, с помощью параметра *b*, т.к. он встречается и в первой, и во второй формулах. Подставим значение параметра *b* из второй формулы в первую:

*а*+(*а*+30)=*с*

Вычислим *а*:

2*а* +30 = *с*

–30 –30

2*а = с –* 30

2 2

*а* = (*с*–30):2

Итак, задача решена параметрически, т.к. в последнем выражении неизвестен только параметр *а*, который нужно вычислить. Причем теперь совершенно неважно, сколько всего билетов было продано. Сколько бы ни было продано, подставляем их количество вместо параметра *с*  и решаем уравнение:

В нашем случае *с* = 480.

Следовательно,

*а* = (480–30):2 = 225 (билетов);

*в* = *а*+30 = 225 + 30 = 255 (билетов).

Задачка решена.

Правда, немного смущает слово «параметрически». Надо разъяснить.

Вспомним нашу самую первую формулу. Это была формула для вычисления длины окружности *c*=*d*. Дайте ребенку старый компакт-диск. Он уже вычислял длину его окружности. Пусть вычислит еще раз. Он измерит диаметр (*d*=12 см), умножит результат на 3,14 и получит 37,68 см.

Теперь пусть вычислит длину внутренней окружности (ее диаметр равен 4 см). Он и это сделает. Получит 12,56 см.

А теперь пусть он вычислит во сколько раз длина внешней окружности больше длины внутренней.

Ясно, что он разделит 37,68 на 12,56 и получит 3. В три раза больше.

Теперь спросите, сколько измерений и сколько вычислений он проделал?

Он проделал два измерения и три вычисления.

А можно было сделать два измерения и всего-навсего одно вычисление… Для этого надо было вначале решить задачу параметрически.

Пусть *с*1 = *d*1 – длина внешней окружности,   
а *с*2 = *d*2 – длина внутренней. Чтобы вычислить во сколько раз длина внешней окружности больше длины внутренней, надо разделить первую длину на вторую. Запишем это с помощью параметров.

**

Это и есть *параметрическое* решение задачи.

В левой части – отношение параметров, которое надо вычислить, а в правой – известные (измеренные) параметры. Только после получения параметрического решения, приступают к вычислениям.

В нашем случае, остается только разделить длину диаметра внешней окружности на длину диаметра внутренней.

**

Ребенок в восхищении! Но он это тщательно скрывает. Да, он получил инструмент. Но универсален ли он? Годится ли для всех задачек? Не верится… Рассмотрим еще задачу из 7 кл.

(Старинная задача). *Послан человек из Москвы в Вологду и велено ему проходить в каждый день по 40 верст. На следующий день вслед за ним был послан второй человек. Ему было велено проходить в каждый день по 45 верст. Через сколько дней второй догонит первого?*

Используем тот же метод.

В первую колонку выпишем параметры, т.е. буквенные обозначения всего, что можно измерить или сосчитать:

*а*1 – количество дней в пути 1-го гонца

*а*2 – количество дней в пути 2-го

*b*1 – путь, пройденный 1-ым;

*b*2 – путь, пройденный 2-ым;

Во вторую колонку запишем связи между параметрами, т.е. формулы:

*а*1 = *а*2 + 1;

*b*1 = *b*2

*b*1 = 40⋅*а*1;

*b*2 = 45⋅*а*2

В третью колонку запишем связи между формулами, т.е. уравнение.

Связь между последними тремя формулами очевидна:

40⋅*а*1 = 45⋅*а*2,

но *а*1 = *а*2 + 1.

Следовательно,

40⋅(*а*2 + 1) = 45⋅*а*2

Получили уравнение, в котором только один параметр. Вычислим его. Вначале раскроем скобки.

40⋅*а*2 + 40 = 45⋅*а*2

40⋅*а*2 – 45⋅*а*2  = –40

–5⋅*а*2  = –40

*а*2  = 8 (дней)

Задача решена.

Решена ли? А что значит решить задачу?

В нашем случае, это значит научиться использовать инструмент под названием математика.

В самом деле, выполняя какую-либо работу, человек не выполняет ее буквально сам, он использует инструменты. Но инструмент надо изготовить и надо научиться им пользоваться.

Инструмент под названием математика у нас уже есть. А как им пользоваться, т.е., каков метод?

Давайте, рассмотрим еще раз решение нашей задачи, опишем, что мы делали и получим определение.

Схематически решение выглядит так:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| параметры  *а*1  *а*2 – ?  *в*1  *в*2 | формулы  *а*1 = *а*2 + 1;  *в*1 = *в*2;  *в*1 = 40⋅*а*1;  *в*2 = 45⋅*а*2 | уравнения  40⋅*а*1 = 45⋅*а*2;  40⋅(*а*2 + 1) = 45⋅*а*2 |
| вычисления  40⋅*а*2 + 40 = 45⋅*а*2  40⋅*а*2 – 45⋅*а*2  = –40  –5⋅*а*2  = –40  *а*2  = 8 (дней) | | |

На первый взгляд схема непривычна. Но привычка – дело наживное. Рассмотрим еще задачу.

*Лодка шла по течению реки часа. На обратный путь она затратила на 28 мин больше. Найти скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 16,5 км/ч.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| параметры  *t*1=*ч*.  *t*2 =?  *v*л=16,5  *v*р = ?  *v*л1= ?  *v*л2= ?  S1= ?  S2= ? | формулы  S1 = *v*1 *t*1  S2 = *v*2 *t*2  S1 = S2  *t*2 = *t*1+28 *мин*.  *v*л1 = *v*л+*v*р  *v*л2 = *v*л–*v*р  28 *мин*.=*ч*  *ч* = *ч* | уравнения  *v*1 *t*1 = *v*2 *t*2  (*v*л +*v*р)*t*1*=* (*v*л –*v*р)*t*2  (*v*л+*v*р)*t*1 =(*v*л–*v*р)(*t*1+*ч*) |
| вычисления  (16,5+*v*р)*ч =* (16,5–*v*р)(*ч* +*ч*)  (16,5+*v*р) *=* (16,5 –*v*р)  38,5 +*v*р *=*  46,2 –*v*р  *v*р + *v*р *=*  46,2 – 38,5  *v*р = 7,7 => *v*р = 1,5 () | | |

Решение кажется громоздким. Но пусть вас это не смущает. Шаг за шагом мы приучаем ребенка распознавать в тексте задачи *величины*, т.е. все, что можно сосчитать и измерить, обозначать их *параметрами*, отделять их от *коэффициентов*, которые показывают связи между *параметрами*, строить по ним *формулы* и составлять *уравнения*. Это очень важно!

Со временем, ребенок будет делать это быстрее, а записи условия задачи и ее решения будут становиться все короче. Причем, через некоторое время ребенок сам предложит вариант более краткой записи.

Краткость будет достигаться за счет записи только параметров, численные значения которых известны. Все параметры нет необходимости записывать.

То же самое и при решении уравнений. С обретением опыта ребенок будет сокращать запись решения. Но он должен сам дойти до сокращенной записи. Например, краткая запись решения последней задачи:

|  |  |
| --- | --- |
| Дано:  *t*1=*ч*.  *v*л=16,5  *v*р = ? | Решение  S1 = (*v*л +*v*р)*t*1  S2 = (*v*л –*v*р)*t*2  S1 = S2; *t*2 = *t*1+*ч*  (*v*л+*v*р)*t*1 =(*v*л–*v*р)(*t*1+)  (16,5+*v*р) *=* (16,5 –*v*р)  *v*р = 7,7  *v*р = 1,5 () |

Теперь, чтобы подготовиться к решению более сложных задач, пусть ребенок повторит за вами следующий вопрос: «Если известно, сколько приходится на единицу, то, как вычислить, сколько приходится на какое-то количество единиц?»

После того как ребенок сможет без запинки воспроизвести вопрос, пусть попробует дать ответ. Вы удивитесь тому, как это будет трудно ему сделать.

Ответ должен быть таким: «Чтобы вычислить, сколько приходится на какое-то количество единиц, нужно количество, приходящееся на единицу, умножить на количество единиц».

Теперь обратный вопрос: «Если известно, сколько приходится на какое-то количество единиц, то, как вычислить, сколько приходится на единицу?»

Ответ: «Чтобы вычислить, сколько приходится на единицу, нужно то, что приходится на это количество единиц разделить на количество единиц».

Для чего все это было нужно?

В дальнейшем вы увидите, что решение практически всех школьных задачек по алгебре, физике и химии будут сводиться к ответам на эти два вопроса.

Чтобы добиться понимания смысла вопросов и ответов и свободного их воспроизведения потребуется немало часов. Будьте к этому готовы, не злитесь и не расстраивайтесь, если у детей это не будет получаться сразу. Превратите все в веселую игру.

Теперь посмотрим со стороны, понаблюдаем за тем, как мы решали задачи и построим обобщенное описание.

1. Текст задачи, записанный на русском языке, мы перевели на язык математики с помощью параметров и формул.

2. Из формул мы получили уравнение. Решение уравнения дало нам искомый результат.

3. Перевели результат из математического языка на русский язык.

# Что такое концентрация раствора?

Утром ребенок завтракает. Если никто никуда не торопится, можно осторожно завести разговор о растворах и концентрациях.

– Ты положил в чашку чая две ложки сахару. Что теперь в чашке?

– Чай и две ложки сахара!

– Мы получили раствор сахара. Чай стал сладким. Если теперь отпить полчашки чаю, «сладкость» оставшегося чая изменится?

– Нет, конечно!

– А если еще половинку от половинки?

– Тоже не изменится!

Количество чая в чашке меняется. Количество сахара в чашке – тоже, а «сладкость» – не меняется. Как же это получается? Как выделить эту постоянную составляющую, отвечающую за «сладкость»?

А сколько процентов от всего сладкого чая составляет растворенный в нем сахар? И почему процентов? Процент – это сотая доля. Значит, надо вычислить, сколько сотых долей от всего чая составляет сахар. Почему сотых?

Масса сахара, по сравнению с массой всего чая в чашке, очень мала. Поэтому для удобства, чтобы не заморачиваться с дробями и долями, решили брать сотые доли, т.е. проценты. Считается, что сказать «пятипроцентный раствор сахара» – это удобнее, чем сказать «пять сотых грамма сахара на грамм раствора».

– Итак, какую долю от всего чая в чашке составляет сахар. Можешь вычислить?

– Если известно, сколько было сахара и сколько чая, то вычислить можно.

– Допустим, сахару было 10 *г,* а чая вместе с сахаром 200 *г*.

– 10 разделить на 200 будет… Одна двадцатая или ноль целых и пять сотых…

– Пять сотых долей, т.е. пять процентов.

– Значит, сахар составляет пять процентов от чая!

– От сладкого чая. Чай без сахара назовем растворителем. Сахар – растворенным веществом. А все вместе – раствором. Как теперь описать, сколько растворенного вещества в растворе?

– Растворенное вещество составляет пять процентов от массы раствора.

– А как это сказать, не произнося слово «процент»?

– Растворенное вещество составляет пять сотых долей от массы имеющегося раствора.

– И что это нам дает? Что мы знаем, если нам известно, что растворенное вещество составляет пять процентов от раствора?

– ?

– Ты же делил количество растворенного сахара на количество раствора и получил, сколько сахару приходится на единицу раствора. В нашем случае на один грамм раствора приходится пять сотых граммов сахару.

– Значит, в двухстах граммах будет в двести раз больше?

– Совершенно верно. Это будет сколько?

– Двести умножить на пять сотых будет десять… десять граммов сахара!

– Верно! Ведь именно столько граммов сахару было положено в чашку.

Теперь надо этому количеству долей растворенного вещества, приходящихся на единицу раствора, присвоить термин.

Количество растворенного вещества, приходящееся на единицу раствора, было названо *концентрацией раствора*.

Например, 12-ти процентный раствор соляной кислоты означает, что в 1 *г* раствора соляной кислоты содержится 0,12 *г* соляной кислоты.

Обычно величину концентрации обозначают параметром *c.*

Таким образом, концентрация раствора – удельная величина. Такая же как, например, как плотность или скорость. Зная, сколько граммов растворенного вещества содержится в 1 *г* раствора, всегда можно вычислить, сколько граммов содержится в любом количестве раствора.

Попробуем решить задачу.

*В сосуд, содержащий 5 литров 12–процентного водного раствора соляной кислоты, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?*

Прежде всего, выясним, что нам надо вычислить. Надо вычислить, сколько литров соляной кислоты содержится в одном литре получившегося раствора. Это и есть концентрация получившегося раствора.

Делаем как обычно.

Пусть, *m* – количество растворенного вещества;

*с* – концентрация раствора;

*М* – количество раствора.

Эти параметры связаны базовой формулой:

*m* = *c* ‧*M*

У нас два раствора – до добавления воды и после. Для каждого из них запишем базовую формулу.

*m*1 = *c*1 ‧*M*1

*m*2 = *c*2 ‧*M*2

Теперь, запишем из условия задачи связи между одинаковыми параметрами.

Связь между *M*1 и *M*2 простая – количество второго раствора на 7 литров больше, чем первого. Следовательно,

*M*2 = *M*1 + 7

Связь между *m*1 и *m*2 тоже простая – после добавления воды, количество кислоты в растворе не изменится. Значит,

*m*1 = *m*2

С помощью последней формулы объединим все параметры в одно уравнение.

*m*1 = *m*2 =>  *c*1 ‧*M*1 = *c*2 ‧*M*2  =>

*c*1 ‧*M*1 = *c*2 ‧(*M*1+7).

И, наконец, вычисление. Подставим численные значения. Только не забываем проценты перевести в десятичные дроби.

12% = 0,12;

0,12‧5 = *c*2‧12;

*c*2 = 0,6:12 = 0,05.

Получилось пять сотых. Пять сотых чего? Пять сотых граммов кислоты в одном грамме его водного раствора.

Теперь десятичную дробь просто запишем в виде процентов

*c*2  = 0,05 = 5%

Ответ. Концентрация получившегося раствора равна 5%.

Таким образом, если вначале на 1 *л* водного раствора соляной кислоты приходилось 0,12 *л* кислоты, то после добавления 7 *л* воды в новом растворе на один литр приходится уже 0,05 *л* соляной кислоты.

# Как измерять углы?

Мы научились наблюдать, описывать наблюдаемое, строить определения, давать им имена (термины), измерять, различать группы и считать. Причем считать не только целые группы, но и части их. Если не получается измерить или сосчитать мы научились вычислять по формуле. Формула позволяет вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко. У нас складывается универсальный алгоритм действий. Проверим, будет ли он работать на чем-нибудь другом.

Точка не имеет определения, т.к. она не имеет размера и не может быть наблюдаема, а, значит, ее нельзя описать. Нет описания, значит, нет и определения. Но термин – точка – есть. Это – предельный термин. С его помощью строятся другие определения.

Прямая тоже не наблюдаема, и она тоже не имеет определения. Но ее можно попытаться описать с помощью термина точка: *прямая* – множество точек расположенных рядом. Хотя, если невозможно представить одну точку, то трудно представить множество точек рядом… Но, что делать, – математика абстрактная наука.

*Отрезок* – часть прямой, ограниченная с двух сторон точками.

Прямая, ограниченная с одной стороны точкой, называется *лучом*. Луч имеет начало, но не имеет конца.

Два луча исходящие из одной точки образуют *угол*.

*луч*

*угол*

*вершина*

*луч*

Точка, из которой исходят два луча угла – *вершина* угла.

Но углы бывают разного размера. Следовательно, их можно и нужно измерять.

Чем и как?

Измерить – значит, сравнить с эталоном.

Эталон угла – угол в 1 градус.

Угол в 1 градус – угол, образованный двумя радиусами, опирающимися на 1/360-ую долю окружности…

Вершина угла, образованного двумя радиусами, совпадает с центром окружности. Поэтому угол, образованный двумя радиусами, будем называть *центральным* углом.

Следовательно, угол в *1 градус – центральный угол, опирающийся на 1/360 долю окружности*.

*r*

*r*

1º



Пусть теперь ваш ребенок задаст вопрос.

Если он спросит, а почему была взята 1/360-ая доля окружности, а не 1/300-ая или 1/100-ая, то наградите его шоколадкой.

В самом деле, почему одна трехсот шестидесятая доля окружности?

О, это старая история! Она началась еще в Древнем Вавилоне. Это сегодня с числами сладит любой третьеклассник. А в те далекие времена числами умели пользоваться только посвященные. А это обычно монахи в храмах. Одно из главных божеств – Солнце.

Утром солнце на востоке. Вечером на закате. А в полдень? Как называется самая высокая точка, на которую поднимается солнце в течение дня?

Некоторые будут удивлены тем, что эта точка называется зенитом. В полдень солнце в *зените*. Это самая высокая точка. Тогда в полночь солнце опустится на самую нижнюю точку.

А как называется самая нижняя точка?

Она называется *надир*.

*зенит*

*закат*

*восход*

*надир*

Получился древний священный символ солнца.

А сколько дисков солнца помещается на дневном его пути.

Спросите ребенка, а можно ли измерить видимый диаметр солнца? Скорее всего, он ответит, что нет. А видел ли он солнечное затмение, а если видел, то как он его наблюдал? Наверное, сквозь затемненное стекло. Так можно ли на темном стекле измерить диаметр светлого диска солнца? Можно.

Это и есть *видимый* (не действительный) диаметр солнца. Если разделить дневной путь солнца на его видимый диаметр, получим количество солнц, умещающихся на… Но, измерить видимый путь солнца невозможно!

Пойдем другим путем. За какое в среднем время проходит солнце свой дневной путь?

Верно, за 12 часов.

Если бы мы знали, за какое время солнце проходит путь, равный собственному диаметру, мы могли бы разделить 12 часов на это время и получили бы количество солнц…

Но как измерить время, за которое солнце проходит по небу расстояние, равное собственному диаметру? Пусть ребенок подумает.

Тем, кто живет у моря, проще. Можно рано утром, когда еще не взошло солнце, выйти на пляж. Телефоны сегодня есть у всех, а в нем секундомер. Включаем секундомер, когда на горизонте из воды появится макушка солнца, и выключаем его, когда солнце полностью выйдет из воды. Сколько получилось? Две минуты! Ребенок будет удивлен.

Разделим 12 часов на две минуты.

Конечно, прежде переведем 12 часов в минуты.

Это составит 720 минут.

Разделим их на две минуты и получим 360 солнц!

Триста шестьдесят – это великое магическое число солнца. Оно делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 8, на 9, на 10.

Не делится оно только на 7.

А почему?

В древности считали, что число 360 не делится на число 7, потому что 360 – число солнца, а 7 – число луны… А луна и солнце вечно враждуют.

Но почему число 7 – число луны?

А почему в неделе семь дней?

Может, неделя тоже связана с луной?

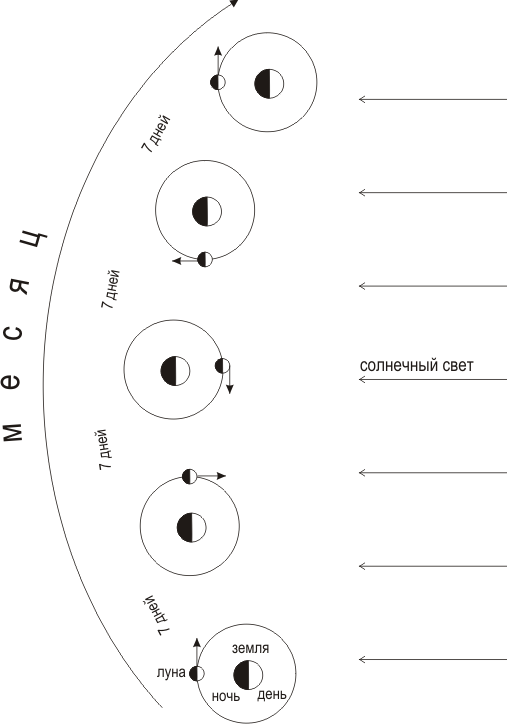
Ребенок уже крайне заинтересован получить ответы.

Луна вращается вокруг земли. Она делает один оборот за… месяц.

При этом мы видим луну, потому что ее освещает солнце.

Так как на луне нет атмосферы, то граница между освещенной и неосвещенной ее частями очень четкая. В процессе движения вокруг земли форма освещенной части для наблюдателя меняется. Это и используется для измерения времени.

Начнем наблюдение с момента, когда в ночном небе ярко светит круглая (полная) луна. Это полнолуние. (Рис. 14).





Через несколько ночей мы заметим, что форма диска луны стала меняться. Она превратится вначале в полумесяц, потом в серп… А потом и вовсе исчезнет. Наступает новолуние. Потом опять появится серп луны, он начинает расширяться, превращается в полумесяц и далее опять становится круглым.

Между полнолуниями – один месяц. А между вполне различимыми полнолунием, полумесяцем, новолунием, полумесяцем и полнолунием — по семь дней.

Вот почему число 7 – число луны. И вот почему в неделе семь дней.

Четко различимые формы луны называют фазами луны.

Время, за которое Земля делает один оборот вокруг Солнца, назывался большой круг (1 год). Большой круг делился на двенадцать частей. На 12, потому что 12 – наименьшее число, которое делится на максимальное количество чисел входящих в пятерку – в число пальцев на одной руке.

И потом, 12 – наибольшее количество, которое можно сосчитать на пальцах одной руки. А как это?

Попросите вашего ребенка сосчитать на пальцах одной руки до 5-ти. Это просто.

А теперь, пусть посчитает до 12-ти. Скажите, что вы видели, как считала бабушка: большим пальцем сосчитайте фаланги на других четырех пальцах. Их ровно 12. Это – *дюжина*.

Двенадцать остановок делает Солнце на двенадцати знаках зодиака пока проходит большой круг. Двенадцатая доля большого круга становится месяцем для года. Ровно 360 дисков солнца помещается на дневном его пути и 360 двойных солнц на всем суточном пути, что образует малый круг. Разделив малый круг, как и большой, на 12, получим 30 двойных солнц, что будут «месяцем» для дня. Разделив этот «месяц» на 30, получим одну двойную минуту – время, за которое солнце проходит путь, равный своему поперечнику. А два луча, опирающиеся на двойное солнце, дадут ровно 1 градус – меру измерения угла – и их на всем малом круге 360. А 360 – это великое магическое число, которое наименьшее из тех, что делятся на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 8, на 9 и на 10, т.е. на максимальное количество чисел входящих в десятку – число пальцев на двух руках.

Не делится 360 только на число луны, на непослушное число 7, которое получило свое имя от бога Сета, который убил своего брата Осириса и, расчленив его тело на 72 части, разбросал их по свету. А если разделить 360 на 72, получится 5. Ведь ровно столько надо прибавить к 360, чтобы получилось 365 – число дней в солнечном году, потому что ровно год безутешная Изида, жена Осириса, собирала останки своего мужа…[[3]](#footnote-3)

Хотя, я думаю, объяснение гораздо проще. Деление чего-либо на 12 дает количество долей, которые группируются по 1, по 2, по 3 и по 4 – максимальное количество групп в пятерке (пальцы на одной руке).

Деление чего-либо на 360 долей позволяет группировать доли по 1, по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, по 8, по 9 и по 10 – максимальное количество групп в десятке (пальцы на двух руках).

Сегодня – это просто. Но когда-то…

\* \* \*

Двенадцать часов – день, двенадцать – ночь. 12 двойных часов – сутки. В часе – 60 минут. В минуте – 60 секунд. Итого, в часе – 3600 секунд. Обыкновенные часы продолжают рассказывать нам эту древнюю историю. Научите вашего ребенка слушать эту магию чисел. Пусть соединит он в сердце своем время настоящее и время древнее. Только так найдет он себя, и не будет он просто песчинкой, которую без цели гонит ветер. Только так вы сможете сказать, что он – это вы, и он продолжит время и продолжит жизнь.

# Что такое угол в 1 радиан?

Рассказ. В прошлый раз вы рассказали детям историю о числе 360, солнце и луне, годе и месяце, Осирисе и Сете…

Рассказ – описание события, которое вы наблюдали. Мы уже знаем, что в прямом угле 90 градусов. А угол в один градус – центральный угол, опирающийся на 1/360-ую долю окружности. Центральный угол – угол образованный двумя радиусами…

Угол, который меньше прямого, называется   
*острым*.

Угол, который больше прямого, называется   
*тупым*.

Если два луча угла образуют прямую линию, т.е. угол равен 180 градусам, то такой угол называется *развернутым*.

Теперь мы можем измерять углы. Инструмент для измерения угла – *транспортир*.

Пусть ваш ребенок попробует изготовить транспортир самостоятельно. Это не так сложно. Надо вырезать полукруг, основанием которого будет, конечно, диаметр. Чтобы измерить угол, надо совместить центр круга (точку в середине диаметра) с вершиной угла и расположить полуокружность так, чтобы его диаметр совпал с одним из лучей. Другой луч покажет на полуокружности количество градусов… Правда, вначале надо отметить эти градусы.

Как отметить градусы на полуокружности?

Половина окружности содержит 180°.

Маленький кружочек – знак градуса. Это маленькое солнце. О связи с солнцем мы говорили в прошлый раз. Половина полуокружности – 90°. Разделим 90° на три части – по 30°. Каждые 30° тоже на три – получим по 10°. Их пополам – это будет по 5° и т.д. Эта процедура называется калибровкой. Полученный инструмент – *транспортир*.

Итак, мы можем измерять углы, сравнивая их с эталоном, с углом в один градус (1°), который есть центральный угол, опирающийся на 1/360 долю окружности, а центральным называется угол, образованный двумя радиусами, а радиус – отрезок, соединяющий точку окружности с его центром, а инструмент для измерения угла – транспортир, а...

Может показаться несколько занудным, постоянное повторение одного и того же. Но так может показаться только взрослым, которым уже трудно учиться. А детям наоборот, это очень интересно… и важно. Почему важно? Да потому что им, наконец, есть что сказать, и они могут это сделать! У них получается связанная речь, рассказ. Причем рассказ сам помогает себя продолжать.

Каждое новое слово (термин) позволяет повторить все, что было раньше. Это как в сказке про репку: появляется новый персонаж и надо повторить все, что было прежде: Жучка за внучку, внучка за бабку, бабка за дедку… Здесь и повторение, и закрепление, и логика, и закономерность.

Мы описали углы, измерили их, но у нас пока нет формулы.

Пусть требуется описать длину дуги, на которую опираются два радиуса. (Рис. 15).

*r*

##### r

##### α

##### l

##### r

*r*



Угол α можно измерить транспортиром. Длину радиуса *r* можно измерить линейкой. Длину дуги *l* линейкой не измерить. Попробуем ее вычислить.

– На какую долю длины окружности опирается угол в 1 градус?

– На одну трехсот шестидесятую долю.

– А угол в 2 градуса?

– На две трехсот шестидесятые доли.

– А угол в 7 градусов?

– На семь трехсот шестидесятых долей.

– А угол в α градусов?

– На α трехсот шестидесятых долей.

– Попробуй это записать, если доля окружности это и есть дуга, на которую опирается угол α.

Должно получиться:

###### 

Здесь, угол α можно измерить транспортиром. А длину окружности не измерить линейкой. Но мы можем вычислить длину окружности по формуле с=2π*r*.

Следовательно,

###### .

Мы получили формулу для вычисления длины дуги, на которую опирается центральный угол.

Градусная мера хороша для измерений… Но она неудобна для вычислений. Формулы получаются довольно громоздкими. Поэтому была введена другая единица измерения угла. Это – угол в 1 радиан (1 *рад*.).

Угол в 1 радиан образуют два радиуса (*r*), опирающиеся на дугу окружности (*l*), равную длине радиуса.

Следовательно*, угол в 1 радиан – центральный угол, опирающийся на дугу окружности, равную длине радиуса.*

*r*

*r*

##### l = r

##### 1 рад.

##### r

##### r

Если мы разделим длину окружности на длину радиуса, получим количество *радиан* в окружности, т.к. на каждую дугу, равную длине радиуса, опирается угол в один радиан.

Вспомнив формулу длины окружности (*с=2πr*), получим:

= =2π.

##### l = r

##### l = r

##### 1 рад.

##### 1 рад.

##### l = r

##### 1 рад.

##### 1 рад.

##### 1 рад.

##### l = r

##### 1 рад.

##### l = r

##### l = r

Итак, количество углов в 1 радиан, умещающихся в окружности, равно *2π* или 6,28. Ведь мы помним, что число π – это количество диаметров, умещающихся на длине окружности, и оно равно 3,14.

Но в окружности 360 градусов.

Следовательно, 2π *рад*. = 360°.

Соответственно, в 1 градусе будет 2π/360 радиан или, после сокращения,

1° = π /180 *рад.*

Можно было бы везде вместо π написать 3,14 и получить конкретные числа, но в большинстве случаев получилась бы дробь, достаточно неудобная в обращении. Например, 30° = π/6 *рад.* =3,14/6 *рад.* = 0,523333… *рад.*

Если учесть, что и само число π равно 3,14 только округленно, а на самом деле это число 3,1415926… и далее бесконечный ряд чисел, то лучше оставить в радианной мере угла параметр π. К тому, что π/4 *рад.*  – это 45°, легко привыкнуть.

В дальнейшем, размерность *рад.* (радиан) для углов, выраженных в радианах кратных числу π, не пишется. Будем писать и говорить, что угол равен, например, пи-пополам (π/2) или пи-на-шесть (π/6), подразумевая, что это, конечно, радианы.

Длина дуги, на которую опирается угол в 1 радиан, равна длине радиуса (*r*). Следовательно, длина дуги (*l*), на которую будет опираться угол в 2 радиана, будет в 2 раз больше, 3 радиана в 3 раза больше, а в φ радиан в φ раз больше, т.е. получаем формулу для вычисления длины дуги, на которую опирается некоторый центральный угол φ, измеренный в радианах.

*l* = φ*⋅* *r*

*r*

##### r

##### l =ϕr

##### ϕ

##### r

*r*

Следовательно, длина дуги, на которую опирается центральный угол в *π* *рад*., будет равна *l* = *πr*.

Здесь, длину радиуса можно измерить линейкой. Угол можно измерить транспортиром в градусах и перевести в радианы, умножив количество градусов на *π/180*°*.* Произведение длины радиуса и величины угла даст длину дуги, на которую опирается этот угол. Измерить линейкой длину этой дуги трудно. Мы ее вычислили. Формула опять помогла нам вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко!

# Признаки равенства треугольников?

Мы знаем, что замкнутая кривая может образовать окружность. А если построить замкнутую ломаную? Ломаная — кривая образованная последовательно соединенными отрезками. Самая простая и самая знаменитая замкнутая ломаная образуется из трех последовательно соединенных отрезков. Это *треугольник*. У треугольника три угла и три стороны. Вершины углов называются также *вершинами треугольника*. Нижняя сторона называется *основанием*. Обозначаются вершины заглавными латинскими буквами, длины сторон — малыми латинским, соответствующими буквам противолежащих вершин. Величины углов треугольника обозначаются греческими буквами. (Рис. 19).

γ

b

a

β

α

B

c

C

A



Треугольники считаются равными, если при наложении все их стороны и углы совпадают.

Но не обязательно сравнивать все три стороны и все три угла. Достаточно сравнить только некоторые из них. Какие?

*Первый признак равенства треугольников гласит: если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Второй признак равенства треугольников гасит:   
*если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны*.

Третий признак равенства треугольников гласит:   
*если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Треугольники могут быть не равными, но одинаковыми по форме, т.е. у них могут равные углы но не равные стороны. Такие треугольники называются подобными.

Признаки подобия треугольников

Первый признак подобия треугольников гласит: *если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то эти треугольники подобны.*

Второй признак подобия треугольников гласит: *если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Третий признак подобия треугольников гласит; *если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.*

Какие стороны у подобных треугольника называются соответствующими (или схоственными)?

Те, которые лежат напротив равных углов.

Следовательно, для подобных треугольников можем записать формулу, которая связывает длины их сторон.

γ

γ

β

α

e

d

b

a

f

α

c

β

Если известны длины двух сторон одного треугольника и длина хотя бы одной стороны подобного ему треугольника, то можно вычислить длины всех сторон обоих треугольников.

# Виды углов

Продолжим знакомство с углами.

Противолежащие углы, образованные пересекающимися прямыми, называются *вертикальными углами.*

##### 1

##### 2

##### 4

##### 3

Углы 1 и 3 – вертикальные. Углы 2 и 4 – тоже вертикальные.

Вертикальные углы равны.

Углы, у которых один общий луч, а два других луча образуют прямую линию, называются *смежными* углами.

##### 2

##### 1

Углы 1 и 2 – смежные.

Сумма смежных углов равна 180°.

*Параллельными прямыми* называются непересекающиеся прямые, лежащие на одной плоскости.

Прямая, пересекающая параллельные прямые, называется *секущей*.

Две параллельные прямые и секущая образуют восемь углов. Рассмотрим их.

##### 8

##### 7

##### 6

##### 5

##### 4

##### 3

##### 2

##### 1

Пусть ребенок покажет на рисунке смежные и вертикальные углы.

Здесь, 3, 4, 5 и 6 – *внутренние углы*. Они расположены внутри (между) параллельных прямых.

Углы 3 и 6 – *внутренние накрест лежащие углы*. Они расположены внутри параллельных прямых крест накрест от секущей. Внутренние накрест лежащие углы равны.

Углы 4 и 5 – тоже внутренние накрест лежащие углы.

Углы 4 и 8 – *соответствующие углы.* Соответствующие углы равны.

Теперь можно сформулировать и доказать первую теорему.

# Как доказать теорему Фалеса?

Теорема Фалеса гласит: *если параллельные прямые, пересекающие лучи угла, делят один луч на равные отрезки, то они делят и другой луч на равные отрезки.*

Сделаем чертеж. Продемонстрируем, что и здесь выполняется обще правило: я наблюдаю, описываю то, что наблюдаю…

Добейтесь того, чтобы ребенок повторил условие теоремы, демонстрируя каждый ее пункт на чертеже. Вот параллельные прямые, вот они пересекают лучи угла и делят один его луч на равные отрезки, вот они делят и второй луч угла на равные отрезки… На равные ли? Надо доказать!

Далее будет важный момент. Ребенок должен научиться пользоваться языком математики, а для этого нужна практика языка. Поставьте точку (А) так, как это указано на рис. 24.

Пусть ребенок опишет положение этой точки. Для него это будет неразрешимая задача. Не томите его долго и опишите сами: это *точка пересечения одной из параллельных прямых и второго луча угла*. Добейтесь, чтобы он повторил эту фразу несколько раз.

##### А



Теперь можно привести текст доказательства.

Чтобы доказать теорему Фалеса, надо через точку пересечения одной из параллельных прямых и второго луча угла провести прямую, параллельную первому лучу.

##### А

##### B

##### E

##### C

##### D

##### H

##### F

##### G



Получим два треугольника AEB и AFG. Если мы докажем, что эти треугольники равны, то это будет означать, что отрезки EA и AG тоже равны. Что и требуется доказать.

Сравним углы в этих треугольниках. Пусть ребенок укажет вертикальные и внутренние накрест лежащие углы. Помогите ему правильно указать параллельные прямые и секущую.

Выяснится, что все три угла первого треугольника равны всем углам второго. Достаточно ли это, чтобы признать треугольники равными? Ребенок решительно заявит, что достаточно.

На самом деле, конечно, нет.

Начертите треугольник и проведите прямую, пресекающую боковые его стороны параллельно основанию.



Получим два треугольника: большой и маленький. Все три угла большого треугольника равны соответственно трем углам маленького… Но сами треугольники не равны.

Для равенства треугольников необходимо еще, чтобы хотя бы одна сторона одного треугольника была равна стороне другого треугольника.

Рассмотрим четырехугольник ABCD на рис. 25.

Стороны AB и CD параллельны по построению. А стороны BC и DA параллельны по условию теоремы. Следовательно, четырехугольник ABCD – параллелограмм.

У параллелограмма противоположные стороны не только параллельны, но и равны. Следовательно, отрезок AB равен отрезку CD.

Но CD равен DH по условию теоремы. В свою очередь DH равен AF, т.к. четырехугольник ADHF тоже параллелограмм. Но это означает, что отрезок AB равен отрезку AF. А это означает, что треугольники AEB и AFG равны.

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

Углы EBA и AFG равны как внутренние накрест лежащие. Следовательно, лежащие напротив них отрезки EA и AG тоже равны.

Теорема доказана.

\* \* \*

Пусть многое ребенку еще не известно, пусть он не помнит все признаки равенства треугольников и не может доказать, что противоположные стороны параллелограмма равны по величине. Это неважно. Важно то, что есть достаточно длинный и понятный текст на математическом языке, который он может воспроизвести. И ребенок постепенно привыкает к новому языку, начинает его чувствовать.

# Теорема о средней линии треугольника

Что дает теорема Фалеса? Где ее можно применить?

Дадим ребенку задание. Пусть у нас строится загородный дом. Чердак получился очень высоким. Решили и на чердаке сделать комнату. Нужно для начала соединить балкой середины левого и правого скатов крыши. Это задание вы даете ребенку. Пусть он опишет последовательность своих действий.

*балка*

После нескольких попыток получится примерно следующее... По крайней мере, добейтесь, чтобы текст получился примерно следующим.

«Я прикладываю лестницу. Забираюсь на крышу, на самый конек. Опускаю вдоль левого ската крыши рулетку и измеряю ее длину. Делю длину пополам. С риском для жизни спускаюсь и отмечаю положение середины ската. Потом, то же самое проделываю с правой стороны. Потом спускаюсь вниз. Забираюсь по лестнице на чердак. Нахожу свои отметки и измеряю рулеткой расстояние между ними. Потом спускаюсь во двор. Нахожу балку. Отпиливаю нужную длину. Поднимаю ее на чердак и прибиваю…»

Теперь скажите, что теорема Фалеса поможет избавиться от самой опасной части работы. Нет необходимости подниматься с риском для жизни на крышу.

Рассмотрим еще раз наш рисунок. Крыша напоминает чертеж к теореме Фалеса. Только в нашем случае, два горизонтальных отрезка (AB и CD) делят левый луч угла и правый луч на равные отрезки. Следовательно, по теореме Фалеса эти два отрезка параллельны.

Через середину правой стороны треугольника ОСD проведем прямую, параллельную левой его стороне.

##### O

##### l

##### B

##### А

##### l

##### l

##### D

##### C

##### G

Четырехугольник ABGC – параллелограмм, т.к. сторона АС параллельна стороне BG по построению, а сторона АB параллельна стороне CG по тереме Фалеса. Следовательно, длина отрезка АB равна длине отрезка CG. Отлично!

Теперь рассмотрим два треугольника OAB и BGD.

Отрезки OB и BD равны по условию задания.

Отрезок BG равен отрезку АС, который в свою очередь, равен отрезку ОА (по условию задания).

Угол АОВ равен углу GBD (соответствующие углы). Две стороны и угол между ними одного треугольника, равны двум сторонам и углу между другого треугольника. Следовательно, эти треугольник равны.

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Значит, отрезок АВ равен отрезку GD.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон треугольника, называется *средней линией треугольника.*

Получили теорему о средней линии треугольника.

*Средняя линия треугольника параллельна основанию треугольника и равна его половине*.

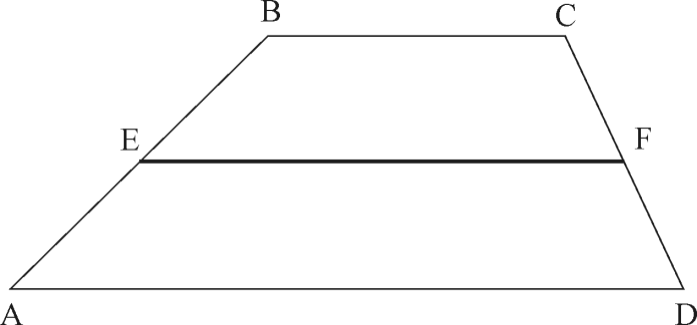
Т.е. .

Чтобы вычислить длину средней линии треугольника достаточно измерить его основание… и разделить его длину на два.

Значит, для выполнения нашего задания было достаточно измерить длину EF прямо по земле. Разделить ее на два. Отпилить балку этой длины. Поднять ее на чердак и параллельно полу поднять ее до касания с крышей и прибить. Балка соединит середины скатов крыши…

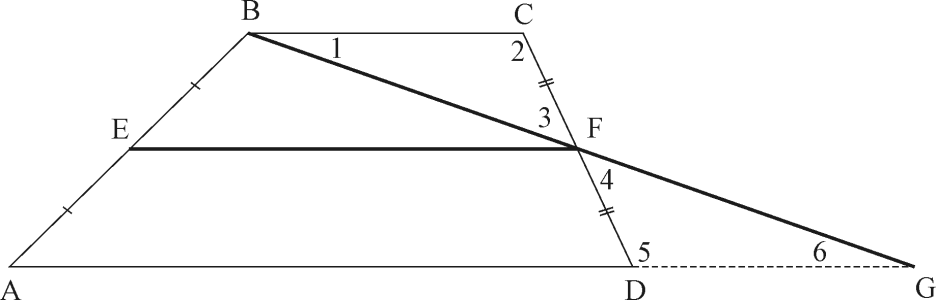
# Теорема о средней линии трапеции

Начертим трапецию (ABCD). Построим в ней отрезок, соединяющий середины боковых сторон – это будет средняя линия трапеции (EF). И подумаем, можно ли вычислить ее длину, измерив только основания трапеции (AD и BC)?



Вначале покажется, что ничего нельзя придумать. Но, вспомним, что часто сложная задачка решается разложением ее на более простые задачки. Мы умеем вычислять длину средней линии треугольника. А нельзя ли нашу задачку тоже свести к треугольнику со средней линией? Можно.

Проведем отрезок из левой вершины через середину правой стороны трапеции до пересечения с продолжением ее основания.



Получим большой треугольник ABG и два маленьких треугольника BCF и FDG.

Докажем, что треугольники BCF и FDG равны.

Здесь, углы 3 и 4 – равны, как вертикальные.

Углы 1 и 6 – равны, как внутренние накрест лежащие. Углы 2 и 5 – тоже.

Сторона CF равна стороне FD, по условию.

Следовательно, треугольники BCF и FDG равны.

Это значит, что отрезки BF и FG тоже равны.

Теперь рассмотрим большой треугольник ABG. В нем отрезок EF соединяет середины боковых сторон треугольника, т.е. это – средняя линия треугольника. Она параллельна основанию и ее длина, как мы выше доказали, равна половине длины основания.

Т.е. .

Но AG = AD+DG, а DG=BC.

Следовательно,



Таким образом, *длина средней линии трапеции равна полусумме длин ее оснований*. Что и требовалось доказать.

Доказательств одной и той же теоремы может быть несколько. Пусть ваш ребенок самостоятельно закончит другой вариант доказательства теоремы о средней линии трапеции.

Построим трапецию, проведем среднюю линию. Теперь проведем диагональ трапеции – соединим отрезком две не соседние вершины. Получатся два треугольника.

Пусть ребенок покажет эти треугольники. Заметим основания треугольников. Ими являются основания трапеции. Осталось доказать, что отрезки, на которые средняя линия трапеции делится диагональю, являются средними линиями треугольников.

Сумма их длин равна средней линии трапеции.

Пусть теперь ребенок запишет это в виде формул и произведет сложение.

Получится формула средней линии трапеции.

# Теорема о сумме величин углов любого треугольника

У нас уже три доказанные теоремы. Теперь надо дать ребенку возможность самому доказать теорему. Пусть он докажет, что сумма углов треугольника равна 180°. Скажите, что это нетрудно будет сделать. Все, что для этого необходимо, у ребенка уже есть. Помогите только сделать дополнительное построение.

Пусть построит треугольник и проведет через его вершину прямую, параллельно основанию.

Расставим обозначения получившихся углов. (Рис. 31). Как они называются?

1

2

3

4

5



– Углы 4 и 1 – внутренние накрест лежащие. Они равны. Углы 5 и 3 – тоже.

– А чему равна сумма углов 4, 2 и 5?

– 180°.

– Отлично! А чему равна сумма углов 1, 2 и 3?

– ?

– Замени в первой сумме углы 4 и 5 на равные им углы 1 и 3.

– Получится тоже 180°.

Итак, в любом треугольнике сумма его углов равна 180°.

А в четырехугольнике? Любой четырехугольник можно разбить на два треугольника проведя диагональ. Следовательно, сумма углов в четырехугольнике будет равна 360°.

А в пятиугольнике?

Здесь, две диагонали разделят пятиугольник на три треугольника. Это даст 540°.

Таким образом, в любом многоугольнике, количество диагоналей, проведенных из одной его вершины, будет на два меньше, чем количество его сторон. Следовательно, и треугольников будет столько же. Тогда, сумма всех углов многоугольника может быть вычислена по формуле:

А = 180° ·(*n* –2)

Здесь, А — сумма углов; *n* — количество сторон многоугольника.

# Что такое площадь?

Продолжим упражняться в описании и знакомиться с формулами, с этими великими помощниками. Но прежде напомним, для чего мы учим уроки.

Сами эти уроки о радиусах и формулах нам, может быть, и не нужны… Нам нужны способности, которые с помощью этих уроков вырабатываются. К примеру, если вы купили сыну гантели, это вовсе не значит, что ему нужны именно гантели. Скорее, ему нужно физическое развитие, которое можно с их помощью получить.

Если ваш ребенок не может описать то, что можно непосредственно наблюдать, то тем более он не сможет описать то, что наблюдать непосредственно трудно или невозможно. Как он опишет мысли, чувства, переживания?… Как он опишет, что у него на душе, если он не может описать восход солнца, летний дождь или радиус с диаметром?

Продолжим изучать простое в надежде на то, что оно поможет понять и освоить сложное.

Ребенок все еще под впечатлением того, как формула помогла вычислить длину окружности и длину дуги, на которую опирается центральный угол. Закрепим это впечатление.

Покажем еще один пример – измерение и вычисление площади.

А что такое площадь?

Для точек и линий, начерченных на доске, множество точек расположенных рядом – *прямая линия…*

Множество параллельных линий – *плоскость*.

Часть плоскости, ограниченная замкнутой кривой – *площадь*.

Площадь для плоскости – то же, что отрезок для прямой.

*Измерить* – значит, сравнить с эталоном.

Следовательно, измерить площадь – значит, сравнить ее с эталоном площади.

А что у нас в качестве эталона площади?

Конечно, площадь квадрата со стороной равной   
1 метру – один квадратный метр.

Спросите у ребенка, как велика классная комната в его школе? Он может сказать, что как три или четыре его комнаты… А точнее?

Необходимо сравнение с чем-то, что известно всем. Это что-то и есть площадь квадрата со стороной 1 метр. Ведь все знают, что такое один метр и поэтому смогут представить квадрат со стороной, равной одному метру.

Но ваш ребенок не так прост. А вдруг он спросит, что такое квадрат?

– Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны, – ответите вы.

– А что такое прямоугольник? Ведь мы его еще не проходили!

*Прямоугольник* – четырехугольник, все углы которого прямые.

Прямоугольник, все стороны которого равны – *квадрат*.

Квадрат, сторона которого равна 1 метру, ограничивает площадь, принятую за эталон площади и называемую «1 квадратный метр (1 *м*2)».

Измерить площадь – значит, сравнить ее с эталоном площади.

Ясно, что выпилить из фанеры квадратный метр и пойти с ним в школу, чтобы измерить площадь классной комнаты, несколько неудобно. Что делать?

Надо измерение заменить вычислением.

Пусть нам нужно измерить площадь прямоугольника, начерченного на листе бумаги. Т.к. площадь невелика, то пусть единицей измерения (эталоном) будет квадрат со стороной не 1 метр, а 1 сантиметр. Чтобы измерить площадь, надо изготовить эталон, т.е. вырезать квадратик со стороной 1 см, и сравнить с ним искомую площадь. Но это, как уже говорилось, довольно неудобно.

Если измерить линейкой длину одной стороны прямоугольника в сантиметрах, то мы узнаем, сколько квадратных сантиметров размещается вдоль этой стороны.

Точно так же, измерив в сантиметрах длину другой стороны прямоугольника, образующей с первой прямой угол, получим количество квадратиков, помещающихся вдоль нее.

1 *см*

1 *см*

На рисунке видно, что получается девять столбиков по пять квадратов в каждом, т.е. всего 45 квадратиков.

Общее количество квадратиков равно произведению длин сторон образующих прямой угол.

Мы избавились от необходимости измерять площадь. Мы ее вычислили. Запишем формулу для вычисления площади прямоугольника.

*s* = *a · b*,

где параметр *s* – площадь прямоугольника, параметр *а* – его длина и параметр *b* – ширина.

Буква *s* взята для обозначения размера площади тоже не случайно. По-английски *square* – квадрат. Отсюда *s* – количество квадратов.

Мы не освободились от необходимости вообще измерять. Но мы заменили довольно хлопотное измерение площади прямоугольника достаточно простым измерением его длины и ширины.

Точно так же и в жизни, овладение новыми технологиями позволяет с минимумом затрат решать довольно сложные житейские проблемы. Но это для тех, кто разумеет, и кто смог овладеть технологиями измерения и вычисления хотя бы на уровне 3-го класса.

# Как вывести формулу площади треугольника?

Отчаянье. Наверное, этим словом можно выразить состояние некоторых моих читателей. Они чувствуют, что все понимают, но так же понимают, что ничего повторить или запомнить не смогут. Все эти площади, квадраты, радиусы, числа *пи* и формулы приводят… да, да – в отчаянье. То же чувствуют и дети.

– Никогда, никогда у меня это не получится! – восклицают они иногда.

Получится! Не надо только впадать в отчаянье.

Прежде всего, напомним, что может так случиться, что никому из вас не придется вычислять площадь прямоугольника. Но мы уже говорили, что нам нужны не сами вычисления, а развитие наших способностей. Нам нужно научиться мыслить. Ошибаются те, кто считают умение мыслить врожденным качеством человек. Врожденным является только способность научиться мыслить.

Думай! Как часто мы произносим это слово, обращаясь к ребенку.

Думай! Очень интересно… я бы подумал, если бы знал, как это делается.

Будем продолжать учиться думать на простых моделях.

Сравнив размер прямоугольника с размером квадратика со стороной 1 см, мы можем описать размер площади прямоугольника, т.е. *измерить* ее.

Перемножив длины сторон, образующих прямой угол, измеренные линейкой в сантиметрах, мы можем *вычислить* площадь прямоугольника.

Но попробуйте, имея в руках только линейку, вычислить или измерить площадь круга.

*Круг – плоскость, ограниченная окружностью.*

Окружность… Ни одного прямого отрезка! Что измерять? Как вычислять?

Для начала, возьмем задачку попроще: вычислим площадь треугольника. Измерить ее практически невозможно. Не уместятся квадратики в треугольнике. А как вычислить? Какие измерить параметры и в какую формулу подставить?

Можно, конечно, иметь под рукой шпаргалку со всеми формулами, куда можно подставить данные и сделать вид, что экзамен сдан.

Но, во-первых, где взять данные и, во-вторых, для чего делать вид? Ясно, что в большинстве школ все еще работает 2-й закон социализма: важна не работа, а отчет о проделанной работе. Но вам-то это зачем и кому вы собираетесь сдавать отчет?

Попробуем самостоятельно выделить данные и вывести нужные формулы. Это умение у вас никто не отнимет, и оно поможет вам самостоятельно составлять формулы для решения более запутанных житейских задачек.

Проведем диагональ в прямоугольнике. Диагональ – отрезок, соединяющий две несмежные вершины прямоугольника. Получим два треугольника. Они совершенно одинаковые, равные. Их площади равны друг другу. Следовательно, площадь одного треугольника равна половине площади всего прямоугольника. А формула площади прямоугольника нам уже известна: *s = ab*.

Значит, = .

Таким образом, для вычисления площади прямоугольного треугольника, необходимо измерить длины двух его сторон, образующих прямой угол, и их произведение разделить на два…

Обратите внимание: полученное решение оказалось достаточно простым. Но простым оно кажется, когда уже получено. Точно также, вновь появившаяся проблема кажется вначале трудноразрешимой, но в конце – все оказывается достаточно просто. Надо научиться не бояться и смело действовать. Действовать, даже не совсем представляя, куда это действие приведет.

Продолжим.

Что делать, если треугольник не прямоугольный?

Нижняя сторона треугольника, называется *основанием*. Обозначим ее длину параметром *а*.

Проведем отрезок прямой от вершины треугольника к его основанию так, чтобы между этим отрезком и основанием получился прямой угол.

*a*

*a1*

*a2*

*h*

Говорят, опустим *перпендикуляр*. Перпендикуляр – отрезок, проведенный к другому отрезку под прямым углом.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к его основанию, называется *высотой* треугольника.

Обозначим ее длину параметром *h*. Высота делит основание треугольника на две части. Обозначим их длины соответственно *a1* и *a2*.

И что?

Проведя высоту, мы разбили произвольный треугольник на два прямоугольных треугольника. Сумма площадей этих двух прямоугольных треугольников даст искомую площадь треугольника. А площади прямоугольных треугольников мы умеем вычислять: надо перемножить длины сторон, образующих прямой угол, и результат разделить на два.

Запишем формулы для площадей двух треугольников:

и .

Сложим эти две площади и получим искомую площадь произвольного треугольника:



Но (*a1+a2)* есть длина основания *а.*

Следовательно, площадь любого треугольника равна

Читается это так: *площадь треугольника равна половине произведения длин его основания и высоты*.

Таким образом, мы заменили достаточно хлопотное измерение площади треугольника простым измерением длин его основания и высоты и вычислением. Чем не экономия!

А можно ли формулу площади треугольника вывести без алгебры? Геометрия дает возможность это сделать. Достроим треугольник до прямоугольника (рис. 32).

*b*

*a*

*a1*

*a2*

*h*

Площадь полученного прямоугольника равна произведению длин его сторон, образующих прямой угол, т.е. S=*ab*. Высота треугольника *h* равна длине боковой стороны прямоугольника *b* и она делит треугольник на два прямоугольных треугольника.

Площадь левого прямоугольного треугольника равна половине площади левого прямоугольника. Площадь правого прямоугольного треугольника равна половине площади правого прямоугольника. Тогда площадь всего треугольника равна половине площади всего прямоугольника. Т.е. половине от S=*ab*.

Следовательно, заменив *b* на *h*, имеем:



Точно так же вычислим площадь трапеции.

*Трапеция* – четырехугольник, у которого параллельны только две стороны.

Допустим, вам надо покрасить пол в комнате вашего ребенка. Пусть пол в комнате имеет форму трапеции. Покрасить 1 квадратный метр стоит, к примеру, 100 руб. Сколько нужно денег, чтобы покрасить весь пол. Пусть ребенок поможет вам вычислить точную сумму, которую нужно будет выплатить мастеру.

Ясно, что надо описать площадь пола. Как? Измерить? Но это довольно хлопотно. Выпиливать из фанеры квадратный метр и сравнивать…

Надо вычислить. А по какой формуле?

Пусть формулу ребенок выведет сам. У него есть все, что для этого необходимо. Только подскажите, что трапецию можно разбить на прямоугольник и два прямоугольных треугольника, формулы вычисления площадей которых, нам уже известны.

# Как вычислить площадь трапеции?

Вычисление – величайшее изобретение. Вычисления позволяют неимоверно сократить время, силы и средства для определения нужных параметров. Вычисления позволяют смоделировать процесс и проанализировать будущие результаты практически без затрат ресурсов.

Как этому научиться?

Продолжать учебу.

Проверим домашнее задание, данное на предыдущем уроке. Удалось ли вашему ребенку вывести формулу для вычисления площади трапеции? И насколько верна полученная формула? Ведь для ее проверки необходимо сравнить значение площади, вычисленное по полученной формуле, с измеренным ее значением. Если результаты совпадут…

А нельзя ли проверить правильность формулы иным, более экономным способом? Все-таки вырезать квадратик и пытаться сосчитать, сколько их поместится в трапецию, чтобы измерить ее площадь – довольно хлопотное дело.

Можно. Это называется *доказательством*.

Допустим, ваш ребенок получил формулу площади трапеции в следующем виде:

,

где *a* и *b* – длины соответственно нижнего и верхнего оснований трапеции; *h* – размер ее высоты.

Пусть покажет, как он получил эту формулу. Если каждый шаг будет ясен и очевиден, то формула тоже очевидна.

*Доказательство* – сведение к очевидному, к аксиоме.

*Аксиома* – утверждение настолько очевидное, что не требует подтверждения.

Хотя часто и очевидность подводит.

В нашем случае, очевидно, что площадь трапеции равна сумме площадей двух треугольников и одного прямоугольника, которые получаются после проведения двух высот.

Для большей очевидности можно сделать чертеж.

Описание: Описание: Рисунок1

Итак, площадь первого треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонами *a*1 и *h*.

Следовательно, площадь первого треугольника будет

.

Площадь прямоугольника, что в центре, очевидно равна

S2= *a*2*h*.

Площадь второго треугольника, соответственно, равна половине площади прямоугольника со сторонами *a*3 и *h* или

.

И, наконец, площадь трапеции равна сумме полученных площадей.

S= *S*Δ1+ S2+ *S*Δ2

Подставим значения площадей:

.

Как сложить площади треугольников и прямоугольника?

Сведем все к прямоугольникам. У нас две половинки площадей двух разных прямоугольников и одна целая площадь третьего прямоугольника. Одна целая состоит из двух своих половинок, т.е.



Следовательно,

;

;

Вынесем за скобки общий множитель *h*.



Очевидно, что *a*1+*a*2+ *a*3 = *a.*



Заменим *a*2 на параметр *b.* Ведь они равны как противоположные стороны прямоугольника. Получим

.

Что и требовалось доказать.

Итак, если формула получена, то ее желательно доказать.

Если формула неизвестна, то ее надо вывести.

Вывод и доказательство два противоположных процесса.

Для чего все это нужно?

У нас наглядная картинка, измеряемые величины и простая логическая последовательность. Годы обучения в нормальной школе с приличными педагогами и решение тысяч задач при достижении ясности в теории, постепенно вырабатывают опыт решения и более сложных задач, которые называются житейскими.

# Как вычислить площадь правильного многоугольника?

Выведем формулу для вычисления площади правильного многоугольника. У правильного многоугольника все стороны и все углы равны.

Вначале, кажется, что задачка не решается. Но соединим отрезками вершины многоугольника с его центром. Получим множество равных треугольников. (Рис. 36).

Равных ли?

А

В



С

О

*a b c*



Все надо доказывать. Поэтому, поступим иначе. Проведем из вершин углов биссектрисы – лучи делящие углы пополам. Все биссектрисы пересекутся в одной точке. Почему? Рассмотрим треугольники АОВ и ВОС. Они равны по второму признаку равенства треугольников: у них равны основания и углы при основаниях (рис. 36*в*). Следовательно, все получившиеся треугольники тоже будут равны, и точка пересечения биссектрис будет центом правильного многоугольника.

Чтобы вычислить площадь одного треугольника достаточно измерить его основание *a* и высоту *h*. Это довольно просто. Формула площади треугольника известна:



Умножив площадь одного треугольника на количество треугольников в правильном многоугольнике, получим площадь многоугольника. Количество треугольников равно количеству сторон многоугольника. Пусть число сторон будет *n*.

Следовательно,

S = *S*Δ·*n* или 

Мы опять заменили довольно хлопотное *измерение* площади правильного многоугольника простым ее *вычислением*. Добавим только, что перпендикуляр, опущенный из центра правильного многоугольника к его стороне, называется *апофемой.*

Умножив длину одной стороны (*а*) на количество сторон (*n*), мы получаем сумму длин всех сторон многоугольника, т.е. его *периметр* (*P* = *a·n*).

Следовательно, формулу площади правильного многоугольника можно переписать в виде:

*S* = **.

*Площадь правильного многоугольника равна половине произведения длин его апофемы и периметра.*

# Как вычислить площадь круга?

*Круг* – плоскость, ограниченная окружностью.

Здесь нет ни одного привычного прямого отрезка. Что и как нужно измерить и в какую формулу подставить?

Здесь нужен качественно иной подход. И мы к нему готовы.

Впишем в окружность правильный многоугольник. Площадь правильного многоугольника мы умеем вычислять.



*r*

##### a

##### n

##### r

Она равна:  или *S* = **.

Из чертежа видно, что апофема правильного многоугольника меньше радиуса, периметр многоугольника меньше длины окружности и его площадь – меньше площади круга.

А если удвоить количество сторон многоугольника так, чтобы он оставался вписанным?

Получим новый вписанный правильный многоугольник, площадь которого больше площади предыдущего многоугольника, но все еще меньше площади круга.



##### n

##### r

##### h

##### если n→∞,

##### то h→r

##### a



А если увеличивать количество сторон до бесконечности?

В этом случае отрезки, стороны вписанного многоугольника уменьшатся настолько, что превратятся в точки и расположатся они на окружности. Следовательно, периметр многоугольника будет практически равен длине окружности, а его площадь станет равной площади круга. Математики говорят, что длина периметра *стремится* к длине окружности и будет ей равна только в пределе. Но в рамках нашего исследования это не существенно. Остается добавить, что, соответственно, апофема станет равной радиусу.

Заменим в формуле для площади многоугольника, у которого число сторон стремится к бесконечности, периметр на длину окружности, а длину апофемы на длину радиуса:



Здесь, мы можем измерить длину радиуса, но не можем измерить длину окружности. Подставим вместо длины окружности ее связь с длиной радиуса из формулы *c = 2πr*.

Получим формулу площади круга:



Потрясающе!

Чтобы вычислить площадь круга достаточно измерить его радиус.

*Площадь круга равна произведению квадрата длины радиуса и числа пи.*

# Как доказать теорему Пифагора?

О теореме Пифагора, пожалуй, слышали все. Но не все могут ее сформулировать. Еще меньше тех, кто может ее доказать. Ваш ребенок будет чувствовать себя гораздо спокойнее и увереннее, если будет уметь это делать. «Да, – скажет он, – я много не знаю и не умею, но я могу доказать терему Пифагора».

А о чем гласит теорема Пифагора?

О том, что *квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.*

Как это перевести на понятный язык и как это доказать.

Если умножить число само на себя, то полученное произведение называется квадратом этого числа.

Например, 4·4=16. Следовательно, 16 есть квадрат числа 4. Записывается это так 42=16. Читается: четыре в квадрате равно шестнадцати.

А при чем здесь квадрат?

В самом деле, почему это действие – умножение числа самого на себя – назвали возведением в квадрат.

Мы знаем, что квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны. Следовательно, умножив длину одной стороны саму на себя, получим площадь квадрата. Т.е., *площадь* *квадрата равна квадрату длины его стороны!* Звучит весело. Тем не менее, именно поэтому, результат умножения числа самого на себя, называют квадратом этого числа.

SΔ

Это будет использовано для доказательства теоремы Пифагора.

А что такое катет и гипотенуза?

*a*

*c*

*b*



В прямоугольном треугольнике стороны (*a* и *b*), образующие прямой угол, называются *катетами*. А сторона (с), лежащая напротив прямого угла – *гипотенузой*.

Итак, теорема Пифагора гласит: квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Докажем это.

Достроим прямоугольный треугольник до квадрата. Для этого, к длине первого катета добавим длину второго катета, и к длине второго – длину первого.

S

На полученных равных сторонах достраивают квадрат. Назовем его большим квадратом. Длина каждой из его сторон равна сумме (*a+b*). Рис. 40.

Отметим на сторонах большого квадрата отрезки, длины которых равны катетам *b* и *a*. Теперь соединим отрезками стыки катетов. Эти отрезки – гипотенузы равных прямоугольных треугольников. Они равны друг другу. Четырехугольник, составленный ими – квадрат. Назовем его малым квадратом.

*a*

*c*

*b*

*a*

*b*

*a*

*b*

*c*

*c*

*c*

*a*

*b*

α

α

β

β



Наш ученик будет согласно кивать. Ему будет казаться, что все понятно.

– А почему четырехугольник образованный гипотенузами – квадрат?

– ?

– Полученные прямоугольные треугольники равны друг другу?

– Да!

– Почему?

– По первому признаку равенства треугольников. У них равны катеты, т.е. у них равны длины двух сторон и величины углов между ними тоже равны.

– Следовательно, стороны четырехугольника, образованного гипотенузами, тоже равны.

– Да!

– Теперь надо доказать, что углы в этом четырехугольнике прямые. Как это сделать?

Рассмотрим два нижних треугольника. Сумма острых углов в каждом из них по 90º. Т.е. *α*+β=90º.

Здесь, угол между катетом *b* левого треугольника и катетом *a* правого – развернутый, т.е. равен 180º. Следовательно, угол между их гипотенузами будет:

180º – (*α*+β) = 180º – 90º = 90º

Аналогично, для всех пар гипотенуз. Следовательно, они образуют квадрат.

На полученном чертеже видно, что площадь большого квадрата равна сумме площадей малого квадрата и площадей четырех равных треугольников. Запишем это в виде формулы:

S = S1 + 4SΔ.

Но, площадь большого квадрата равна квадрату его стороны, а его сторона равна (*a+b*). Следовательно,

S = (*a+b*)2.

Площадь малого квадрата, соответственно, равна квадрату длины гипотенузы, т.е. S1 = *с*2.

А площадь одного треугольника равна

SΔ = 

Следовательно,

2

(a+b)2= с2 +4 ·.

1

В левой части (a+b)2 = a2 + 2 a·b + b2. Значит,

a2 + 2 a·b + b2 = с2  + 2 a·b

или

*a*2 *+ b*2 = *с*2.

Что и требовалось доказать!

# Как применить теорему Пифагора?

– Для чего учить уроки?

– Для того, чтобы учительница не поставила двойку.

Следовательно, если учительница двойки не ставит, то уроки учить незачем! Следовательно... можно поискать другие способы, чтобы учительница не ставила двойки.

И способы находят. Начиная от коробки конфет на день рождения до банальной взятки. И это потому, что на первый вопрос был дан неверный ответ.

Попробуем дать другой ответ.

– Для чего учить уроки?

– Для того, чтобы стать успешным и богатым!

Но биографии успешных и богатых в большинстве своем показывают, что школьные уроки они не очень-то жаловали. Да и ныне, для достижения успеха и обретения богатства, теорема Пифагора как будто не нужна. Так для чего ее учить?

– Для того, чтобы стать человеком!

Философский аспект вопроса «что есть человек?» оставим на потом. Детей это не интересует. Детей не интересуют будущие успехи и будущие богатства. Их вообще не интересует взрослое будущее. Их интересует детское настоящее. Дети любят играть. Поэтому лучше превратить занятия в игру, в которой нужно победить или в загадку-задачку, которую надо решить.

Итак, вот задачка: как определить расстояние между двумя деревьями, если между ними небольшое болотце и по нему пройти нельзя?







Ребенок здесь может предложить, например, привязать к веревке камень и перебросить через болото... Но по условию задачи, болото пересекать нельзя, т.е. *измерить* расстояние между деревьями невозможно. А мы знаем, что если нельзя измерить, то можно попробовать *вычислить.* Вычислить с помощью других измерений и формулы. Пусть попробует.

Напомните ему о теореме Пифагора. Да, теорему он помнит. А как ее теперь применить?

Если ребенок догадается построить прямоугольный треугольник (рис. 42) и, измерив катеты АС и ВС, вычислит нужное расстояние АВ, то это будет грандиозный успех. Такого молодца обязательно нужно похвалить и дать приз за победу. Неважно, какой будет приз, пусть это будет просто конфета... Важно, чтобы успех был замечен.

C

В

A







Отпраздновав победу, надо озадачить победителя новой проблемой.

На бумаге легко построить прямоугольный треугольник. А как это сделать на местности? Как, например, во дворе построить большой прямоугольный треугольник, т.е. как построить прямой угол, если ни транспортира, ни нивелира, ни других инструментов нет... Есть только длинная веревка. Пусть ребенок подумает.

Но не томите его долго. Вряд ли он сам догадается. Сообщите, что, например, перед древними строителями стояла та же задача, и они ее решали. Решали с помощью, так называемого, *египетского треугольника*. А какой треугольник называется египетским?

Здесь мы опять возвращаемся к игре числами или к магии чисел. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц – прямоугольный. Об этом говорит теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е.

32 + 42 = 52

Следовательно, треугольник – прямоугольный.

Причем, это единственная последовательность чисел, отличающихся друг от друга на единицу, для которой выполняется это равенство. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц, называется египетским треугольником.

Сумма длин сторон египетского треугольника равна 12 единицам. А с числом 12 мы уже знакомы.

Возьмем длинную веревку и завяжем на ней узлы, так чтобы получилось 12 равных отрезков.

Соединим-свяжем ее концы и получим кольцо. Делений на нем столько же, сколько и на циферблате часов – 12.

Теперь достаточно натянуть кольцо между колышками, расположенными соответственно через три, четыре и пять узелков, и мы получим прямоугольный треугольник.

90°

Применим это к нашей задаче. По условию задачи мы не можем пересекать болото. Но все окружающее пространство использовать можно. Мы можем построить прямой угол в другом месте так, чтобы катеты AС и ВС были продолжениями катетов EC и DC.



##### 90°

##### В

##### D

##### А

##### С

##### E

# Что такое квадратный корень?

Терема Пифагора связывает длины сторон прямоугольного треугольника… Вернее, квадраты длин его сторон.

###### *с*2 = *а*2 + *b*2

Следовательно, может получиться уравнение, где параметр будет находиться под знаком квадрата. Это квадратное уравнение.

Как решать квадратные уравнения?

Метод тот же самый. Надо развести известные и неизвестные величины по разные стороны от знака равенства.

Рассмотрим вначале простой случай. Решим уравнение:

2*x*2 – 32 = 0

Решаем по нашей схеме: избавимся в левой части от известного слагаемого и т.д.

2*x*2 – 32 = 0

+32 +32

2*x*2  = 32

2 2

*x*2 = 16.

Теперь надо избавиться от квадрата в левой части. Как? Нужно проделать действие, обратное возведению в квадрат. Т.е. нужно подобрать число, квадрат которого был бы равен 16.

Это действие называется извлечением квадратного корня.

Следовательно, нужно извлечь квадратный корень из *x*2, т.е. подобрать число, квадрат которого был бы равен *x*2. Это действие обозначается соответствующим знаком ().

Извлечем квадратный корень из левой и правой частей уравнения:



*x* = 4

Кажется, уравнение решено. Но мы знаем, что минус четыре в квадрате тоже дает 16. Значит, мы упустили второй корень.

В самом деле,

(–4)2= 16 и (+4)2=16

Правда, может показаться, что

Это неверно. Арифметический корень от числа всегда положителен.

Как не ошибиться? Здесь применятся новый знак – модуль числа. Он обозначается прямыми скобками.



Модуль числа раскрывается следующим образом.

Если *a>*0, то |*a*| = *a.* Например, |8| = 8.

Если *a*<0, то |*a*| = –*a*. Например, |–8| = –(–8)=8.

Значит, если *a* <0, то 

В большинстве случаев, у квадратного уравнения будут два корня.

Для нашего последнего уравнения :

|*x*| = 4 => *x*1= 4, *x*2= – 4.

# Как решать квадратные уравнения?

Пусть требуется решить уравнение:

4*x*2 – 12*x* = 0.

Здесь, просто выносим общий множитель (4*х*) за скобки

4*х* (*х* – 3) = 0

Мы знаем, что произведение двух выражений равно нулю, только если один из сомножителей равен нулю.

В первом случае: 4*х* = 0 при *х =* 0.

Во втором случае: *х* – 3 = 0 при *х* = 3.

Здесь у уравнения тоже два корня: *x*1= 0, *x*2= 3.

Рассмотри третий случай.

Пусть

*х*2 + 8*х* – 9 = 0

Сделаем все, что мы можем сделать.

*х*2 + 8*х* – 9 = 0

+9 +9

*х*2 + 8*х*  = 9

Здесь вынесение *x* за скобки ничего не даст. Что делать?

Заметим, что имеется первое слагаемое в квадрате и за ним опять первое слагаемое как множитель… Напоминает формулу сокращенного умножения.

В самом деле, второе слагаемое в левой части уравнения можно представить в виде удвоенного произведения:

*х*2 + 8*х* = 9

*х*2 + 2*х*4 = 9

У нас есть квадрат первого числа, плюс удвоенное произведение первого и второго. Далее должен следовать квадрат второго числа. Давайте, добавим его, и, чтобы не нарушать равенство, добавим его и к правой части:

*х*2 + 2*х*4 = 9

*х*2 + 2*х*4 + 42= 9+42

Теперь свернем первые три слагаемых в левой части уравнения в квадрат разности:

(*х +* 4)2= 25

Избавимся от квадрата в левой части, извлекая квадратный корень. То же самое придется сделать в правой части.

√(*х +* 4)2= √25

|*x* + 4| = 5

±(*х +* 4) = 5

*х +* 4 = ±5

*х* = ±5 – 4.

Имеем два корня уравнения:

*х*1 = 5 – 4 = 1

*х*2 = –5 – 4 = –9.

Уравнение решено.

Или можно решить по-другому:

(*х +* 4)2= 25 => (*х +* 4)2– 52 =0.

Разложим на множители разность квадратов.

(*х +* 4)2– 52 = (*x*+4–5)(*x*+4+5)= (*x*–1)(*x*+9)

Следовательно,

(*x*–1)(*x*+9)=0

*х*1=1 или *х*2 = –9.

# Что такое дискриминант?

На предыдущем уроке мы решили квадратное уравнение. Но каждый раз выделять квадрат разности или суммы — довольно хлопотно и долго. Нельзя ли придумать что-нибудь, чтобы побыстрее? Выяснилось, что можно.

Решим тем же способом квадратное уравнение в общем виде

*aх*2 + *bх* + *c* = 0

Избавимся от множителя *а,* разделив на него обе части уравнения и перенесем свободный член в правую часть. Получим



Имеем: квадрат первого числа, плюс первое число *х*, умноженное на *b/a*. Умножим числитель и знаменатель второго слагаемого на два:



Получили квадрат первого числа плюс удвоенное произведение первого (*х*) и второго  чисел. Прибавим квадрат второго числа к обеим частям уравнения:



Первые три слагаемые можно собрать в квадрат суммы двух чисел:





Избавимся от квадрата в левой части, извлекая корень квадратный из обеих частей уравнения:









Мы получили формулу корней квадратного уравнения.

Теперь можем быстро решить любое квадратное уравнение. Например,

###### 2*х*2 + 3*х* + 1 = 0

Здесь, *а*=2, *b*=3 и *c*=1

Следовательно,







Уравнение решено.

А что такое «дискриминант»?

Это слово сразу вспоминают дети, как только с ними заговаривают о решении квадратных уравнений. Многие даже знают, как его вычислить. Но на вопрос, что это такое?, практически никто не может ответить.

Рассмотрим еще раз формулу корней квадратного уравнения.



Здесь, в правой части в числителе под знаком квадратного корня находится разность двух выражений. Следовательно, при некоторых значениях *а*, *b* и *с,*  под корнем квадратным может получиться отрицательное число. Но под квадратным корнем не может быть отрицательного числа. В этом случае говорят, что уравнение не имеет корней

Разность  называется *дискриминантом*, т.к. она позволяет различить, есть ли корни у уравнения, а если есть, то сколько их. Поэтому, прежде, чем приступить к решению уравнения, вычисляют значение дискриминанта.

Если дискриминант положителен, то продолжают решение. Корней у уравнения два.



Если же он отрицателен, то сразу говорят, что корней нет.

А если дискриминант равен нулю, то у уравнения только один корень:



# Что такое неравенство?

– А какие буквы закреплены за величинами радиуса, диаметра и окружности?

– Это буквы *r*, *d*, *c*.

– Какая буква закреплена за величиной хорды?

– Закрепленной буквы у хорды нет.

– Как называются буквы, обозначающие величины?

– Они называются параметрами.

– Значит ли это, что у хорды нет параметра?

– Ну, длина, т.е. величина у хорды есть, но закрепленной буквы нет.

– Почему?

– В одной и той же окружности длины радиусов, диаметров и длина окружности – величины постоянные. А длины хорд в одной и той же окружности могут быть разными, поэтому и буквы должны быть разные.

– Очень хорошо! Предлагай, какой буквой обозначим длину данной хорды.

– Пусть будет буква *l*.

– Хорошо. Теперь задача: вычисли длину диаметра, длину окружности и длину хорды в окружности, радиус которой равен 10 *м*.

– Длина диаметра равна 20 *м*. Длина окружности равна 31,4 *м*, а длина хорды… Она может быть любой.

– Любой? Может ли она быть равной 40 *м*?

– Нет, не может.

– Но ты же сказал, что длина хорды может быть любой.

– Любой, но не больше длины диаметра.

– А меньше быть может?

– Может.

– Даже отрицательной?

– Нет, отрицательной длины не бывает.

– Как записать все значения длин хорд, которые могут быть в данной окружности.

– Это невозможно.

– А параметрами? Как называется связь между параметрами?

– Формула!

– У нас есть формулы, связывающие параметры *r*, *d*, *c.* Запиши их.

– Их три: *d*=2*r*; *с*=π*d*  и *с*=2π*r*.

– А параметр *l* (длина хорды) связан с параметрами *r*, *d*, *c*?

– Нет.

– Но, ты же сам сказал, что длина хорды не может быть больше длины диаметра. Значит, каким-то образом они связаны.

– Да. Но длину хорды нельзя вычислить по длине диаметра. Мы только знаем, что она меньше длины диаметра.

– Следовательно, значение параметра *l* лежит в каком-то интервале. А как записать все возможные значения длины хорды для окружности данного радиуса?

Интервалы значений параметров записываются с помощью известных знаков: **>** (больше), **<** (меньше), **≥** (больше или равно), ≤ (меньше или равно), **≠** (не равно). Следовательно, в нашем случае:

###### *l≠ c; l* ≤ *d*; *l* ≤ 2*r*; *с* ≥ *π·l*

Эти выражения называются неравенствами.

Неравенство – не просто отрицание равенства, а еще и описание интервала значений величин, для которых это неравенство выполняется.

Любое уравнение превращается в неравенство, если поставить условием вычисление значений переменной, не удовлетворяющей данному уравнению.

Рассмотрим линейное уравнение

###### 2*x* – 12 = 0

Значение переменной *x*, удовлетворяющее этому равенству, равно 6.

А какие значения не удовлетворяют?

Все остальные, кроме 6.

Как это записать?

Ясно, что для всех значений переменной *x,* отличной от 6, выражение (2*x*–12) будет или меньше нуля, или больше нуля.

Рассмотрим 1-ый случай.

###### 2*x* – 12 > 0

Получили неравенство.

Правила решения неравенств такие же, как и для решения равенств (уравнений). Решим данное неравенство.

2*x* – 12 > 0

+12 +12

2*x* > 12

2 2

*x* > 6

Следовательно, для всех значений переменной x больше 6, выполняется наше неравенство. Покажем все эти значения на числовой прямой.

0

6

+∞

–∞

Заштрихованная часть показывает все решения нашего неравенства. Записывается решение неравенства так:

###### *x* ∈ (6; +∞)

Читается это так: переменная *x* принадлежит интервалу значений от 6 до плюс бесконечности, не включая само число 6. Не включение числа 6, здесь обозначено круглой скобкой перед числом 6, а на чертеже – пустым кружочком в точке 6.

Решим второе неравенство.

2*x* – 12 < 0

Здесь, *x* < 6.

Покажем все эти значения на числовой прямой.

–∞

+∞

6

0

Заштрихованная часть показывает все решения второго неравенства. Запишется решение так:

###### *x* ∈ (– ∞; 6)

Читается это так: переменная *x* принадлежит интервалу значений от минус бесконечности до 6, не включая само число 6. Не включение числа 6, здесь, обозначено круглой скобкой после числа 6, а на чертеже – пустым кружочком в точке 6.

Объединение обоих решений и есть все значения переменной x, которые не являются решениями рассматриваемого уравнения 2*x* – 12 = 0. Записывается это объединение так

###### *x* ∈ (– ∞; 6) ∪ (6; ∞).

Итак, неравенства решаются так же, как и равенства. Но, за одним исключением: при делении или умножении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный.

Например, решим еще неравенство.

###### 

При выполнении последнего действия, мы умножили обе части неравенства на минус два. Умножение обоих частей неравенства на отрицательное число приводит к изменения знака неравенства на противоположный. Было больше или равно (≥), стало меньше или равно (≤).

На числовой оси решение неравенства выглядит так:

0

14

+∞

–∞

Решение неравенства запишется так:

###### *x* ∈ (– ∞; 14].

Читается это так: переменная *x* принадлежит интервалу значений от минус бесконечности до 14, включая само число 14.

Включение числа 14, здесь, обозначено квадратной скобкой после числа 14, а на чертеже – залитым кружочком в точке 14.

Решение более сложных неравенств рассмотрим на одном из следующих уроков (стр.216).

# Как вычислить вероятность события?

Игра. Играть любят все. Главное в игре – неопределенность результата. Никто не знает, чем она закончится. Если результат заранее известен, такая игра никому не интересна, и это не игра.

Количественная оценка возможного результата называется вероятностью.

Я подбрасываю монету. Орел или решка? Результат заранее неизвестен. Одно из двух: или орел, или решка. Вероятность выпадения «орла» равна одной второй или 0,5.

Я подбрасываю игральную кость. Может выпасть значение от 1 до 6. Вероятность выпадения, например, 5 равна одной из шести или одной шестой.

Вероятность событияА обозначим Р(A).

Обозначим количество всех возможных результатов события параметром *n*.

Обозначим количество благоприятных исходов параметром *m*.

Тогда, Р(A) = *m* / *n*.

Если Р(A)=1, то это событие называют *достоверным*.

Если Р(A)=0, то событие называют *невозможным*.

Если 0< Р(A)<1, то событие называют *случайным*.

Рассмотрим еще пример.

Пусть в коробке 15 шаров. 4 красных, 5 белых и 6 синих. Достали один шар.

Пусть P(К) – вероятность события, при котором шар окажется красным, Р(Б) – белым, Р(С) – синим.

Какова вероятность каждого события?

Р(К)=4/15

Р(Б)=5/15=1/3

Р(С)=6/15=2/5.

Сумма всех вероятностей всегда равна единице.

Р(К)+Р(Б)+Р(С)= 4/15+1/3+2/5=1

Какова вероятность, что шар окажется цветным?

Здесь, ответ может быть получен двумя способами.

Мы знаем, что вероятность события, при котором шар окажется белым равна Р(Б)= 1/3. Следовательно, вероятность события, при котором шар окажется цветным, будет: 1 – Р(Б) = 1– 1/3 = 2/3.

Или. Всего цветных шаров 4+6=10. Следовательно, вероятность события, при котором шар окажется цветным, будет Р(Ц)=10/15=2/3.

А какова вероятность события, при котором шар окажется желтым?

У нас в урне нет желтого шара. Данное событие невозможно: Р(Ж)=0.

А какова вероятность события, при котором вытащенный предмет окажется шаром?

У нас в коробке только шары. Поэтому, если мы что-то и вытащим из урны, то это будет только шар – это достоверное событие. Его вероятность равна единице: Р=1.

# Что такое объём?

Смотрел ли ваш ребенок 3D фильм?

Конечно, смотрел.

А что такое 3D?

3D – сокращение от [*Three-dimensional*,](http://en.wikipedia.org/wiki/Three-dimensional_space) т.е. трехмерный, объемный.

А что такое объем?

*Точка* не имеет размера (размерности) и определения.

Множество точек, расположенных рядом, – *прямая линия…* Прямаяодномерна. Она может быть условно описана только точкой.

Часть прямой, ограниченная двумя точками – *отрезок*. Отрезок можно измерить.

Множество параллельных прямых – *плоскость*.

Плоскость двумерна. Она может быть условно описана точкой и прямой.

Часть плоскости, ограниченная замкнутой кривой – *площадь*.

Площадь для плоскости – то же, что отрезок для прямой.

*Измерить* – значит, сравнить с эталоном.

Следовательно, измерить площадь – значит, сравнить ее с эталоном площади.

А что получится, если множество плоскостей расположить друг над другом параллельно друг другу? Получится *пространство.* Пространство трехмерно. Оно может быть условно описано точкой, прямой и плоскостью.

Пространство, ограниченное площадями, называется *объемом*.

Пусть ребенок приведет пример пространства и объема.

Конечно, пространство у него будет только космическое (неограниченное ничем), а объемом, например, –пространство комнаты, ограниченное площадями стен, пола и потолка.

Заметим что объем обычной комнаты – это пространство ограниченное прямоугольниками. Такой объем называют *прямоугольным параллелепипедом*.



Потренируйтесь совместно составить описание того, что изображено на рис. 50.

Кратчайший вариант описания, т.е. *определение*, будет следующим: *прямоугольный параллелепипед* это – пространство, ограниченное прямоугольниками. В самом деле, если потребуется ограничить пространство прямоугольниками, их придется взять ровно шесть и всегда получится *прямоугольный* *параллелепипед*.

Тогда, *параллелепипед* – это пространство, ограниченное параллелограммами.

Сторона параллелепипеда, называется *гранью*.

У параллелепипеда все грани представляют собой параллелограммы.

Стороны граней, называются ребрами параллелепипеда.

B'

C'

D'

A'

C

B

A

D



В тексте обозначаться параллелепипед будет заглавными буквами, соответствующими его вершинам. Например, на рис. 51 изображен параллелепипед ABCDA'B'C'D'.

Как описать размер объема?

Надо его измерить. Измерить, значит сравнить с эталоном.

А что у нас в качестве эталона объема?

Эталоном площади была плоскость, ограниченная квадратом со стороной 1 *м*, т.е. один квадратный метр (1 *м*2).

Эталоном объема будет куб с ребром в 1 *м,* т.е. один кубический метр (1 *м*3) . У куба шесть граней и каждая представляет собой квадрат.

*Куб* – это прямоугольный параллелепипед с квадратными гранями.

Предложите ребенку описать объем комнаты. Спросите, что нужно сделать, чтобы измерить объем комнаты?

Он, конечно, начнет говорить, что надо взять линейку и вначале измерить длину и ширину, потом измерит высоту и все перемножить. Так его в школе учили. Но вы напомните, что задание было – измерить объем, а не вычислить его.

Если ему не удастся это сделать, вы драматическим тоном расскажете, что для этого надо будет вынести всю мебель, потом из фанеры сколотить куб, у которого длина, ширина и высота будут по 1 *м*.

1*м*

1*м*

1*м*

А потом надо будет сосчитать, сколько таких кубов потребуется, чтобы полностью заполнить всю комнату.

Он будет впечатлен.

А нельзя ли упростить операцию?

Можно. Поставим мысленный эксперимент.

Спросите, сколько кубов потребуется, чтобы заполнить весь пол? Площадь пола мы умеем вычислять. Площадь пола показывает, сколько квадратов со стороной один метр потребуется, чтобы полностью заполнить пол. Но ведь основание куба с ребром в 1 *м*, тоже имеет площадь ровно 1 квадратный метр. Следовательно, количество кубов, которое заполнит пол, будет равно площади пола. И это только один слой высотой в 1 *м*. Количество слоев будет равно высоте комнаты в метрах.

Пусть ребенок шагами измерит длину и ширину комнаты. Пусть два его средних шага равны 1 *м*. Допустим, длина комнаты 5 метров, а ширина – 4 *м*. Теперь вычислим площадь пола. Это он сделает легко.

###### S = *a·b* = 4×5=20 (*м*2)

Сколько кубических метров потребуется, чтобы покрыть ими весь пол? Правильно, тоже 20.

А сколько еще потребуется кубических метров, чтобы заполнить всю комнату. Высота кубиков равна 1 *м*. А чему равна высота комнаты? Пусть ее высота равна 3 *м*. На один метр высоты приходится 20 кубических метров, а на три – 60.

Следовательно, для вычисления площади прямоугольного параллелепипеда, нужно измерить длины его ребер, образующих меду собой прямой угол. Их произведение даст объем, т.е. V=*a*×*d*×*h*

*a*

*b*

*h*

V – параметр, обозначающий объем (первая буква английского *volume* – объем)

Объем куба:

###### V= *a*×*a*×*a*=*a*3

Теперь понятно, почему третью степень числа называют кубом числа.

Объем параллелепипеда: V= S*·h*

*h*

S

Здесь, *h* – высота параллелепипеда – перпендикуляр, опущенный из вершины параллелепипеда к его основанию; S – площадь основания параллелепипеда.

Итак, у прямоугольного параллелепипеда есть объем. Но у него есть и поверхность. Как вычислить площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда?

Над этой задачкой пусть ребенок подумает сам и сам получит формулу, а вы, в крайнем случае, задайте ему несколько наводящих вопросов.

# Формулы объемов различных фигур

Объем – это пространство ограниченное площадями.



Объем, ограниченный многоугольниками, называется *многогранником*.

Многогранник, у которого две грани параллельны и равны, называется *призмой*.



Объем призмы: V=S*h*.

Многогранник, у которого все грани, кроме одной, – треугольники с общей вершиной, называют *пирамидой*.



Объем пирамиды: V= S*h*

Пирамида, имеющая в основании треугольник – *треугольная* *пирамида*.

S

*h*



Остались конус и цилиндр.

Представим, что у пирамиды в основании правильный многоугольник с бесконечно большим количеством сторон. Такое основание ничем не будет отличаться от круга. Пирамида превращается в конус.



Объем конуса: V = S*h* = π*r*2*h*

А теперь представим призму, у которой в основании правильный многоугольник с бесконечно большим количеством сторон. Опять получаем в основании круг. Призма превращается в цилиндр.

*h*

*r*



Попросите ребенка описать, что он видит? (Рис. 57). Если он скажет, что у него не получается описать, подбодрите его, пусть вначале попробует неправильно описать. Неправильное описание – тоже описание. Потом его можно будет исправить.

Пусть попробует вспомнить описание куба или прямоугольного параллелепипеда.

Цилиндр – пространство, ограниченное двумя параллельными кругами и … изогнутым прямоугольником? Не очень складно.

Попробуем по-другому. Вспомним, как мы описывали объем. Аналогично, получаем: цилиндр – множество параллельных кругов, нанизанных на прямую, проходящую через их центры.

Уже лучше.

Верхний и нижний круги, называют *основаниями цилиндра*.

Поверхность цилиндра, образованная множеством ее окружностей, называют *боковой поверхностью*.

Перпендикуляр, соединяющий плоскости оснований цилиндра, называется его *высотой*.

Объем цилиндра измерить кубиками невозможно. Но его можно вычислить.

В основании цилиндра расположен круг. Как вычислять площадь круга мы знаем: S= π*r*2.

Объем цилиндра будет равен произведению площади его основания и высоты.

###### V = S·*h*= π*r*2*h*.

Площадь поверхности цилиндра складывается из площадей его оснований и площади боковой поверхности. Боковая поверхность представляет собой прямоугольник, со сторонами равными высоте и длине окружности.

Площадь основания цилиндра S1 = π*r*2.

Площадь боковой поверхности цилиндра

S2= *c·h*=2π*r·h*.

Следовательно, площадь поверхности цилиндра равна:

S = 2S1 + S2 =2·π*r*2+2π*rh =*2π*r*(*r*+*h*).

Теперь рассмотрим мячик. Попросите ребенка описать поверхность мячика. Вначале покажется, что здесь не за что зацепиться.

Пусть он вспомнит определение окружности. Это он сделает сразу. Теперь, скажите, что более точное математическое определение у нее будет таким: *окружность – множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.*

Подскажите, что в некотором смысле и поверхность мячика – множество точек пространства, равноудаленных от данной точки. Данное множество точек называется *сферой*.

*r*

O

Итак, *сфера – площадь, равноудаленная от данной точки (или множество точек пространства, равноудаленных от данной точки)*.

*Точка равноудаленная от сферы, называется ее центром.*

*Отрезок, соединяющий точку сферы с ее центром, называется радиусом сферы*.

И наконец, *шар – пространство, ограниченное сферой.*

Площадь поверхности сферы:

###### S = 4π*r*2.

Объем шара:

###### V=

Можно поставить ряд вопросов, на которые ребенок должен будет ответить сам.

– Есть ли у шара диаметр?

– Как измерить диаметр шара?

– Можно ли измерить радиус шара?

– Как вычислить радиус шара?

У нас получилось множество фигур, площади поверхностей и объемы которых вычисляются по соответствующим формулам. Причем, эти формулы связаны друг с другом общими параметрами. Следовательно, можно построить множество уравнений, которые позволять вычислить необходимый параметр, с помощью его связей с другими параметрами. Важно, чтобы ребенок понял, что эти **связи можно строить самостоятельно!**

# Что такое степень числа?

В предыдущих главах, сложение одинаковых групп мы назвали умножением (стр. 30), а результат умножения – произведением.

Произведение двух одинаковых множителей мы назвали квадратом числа: *а·а=а*2.

Произведение трех одинаковых множителей мы назвали кубом числа: *а·а·а =а*3.

А как будет называться произведение четырех одинаковых множителей? Любого количества одинаковых множителей?

Оно будет назваться степенью числа.

*Степень числа* – произведение одинаковых множителей. Сам множитель, здесь, называется основанием степени, а количество множителей – показателем степени.

Например, 34 =3*·*3*·*3*·*3=81. Здесь 3 – основание степени; 4 – показатель степени;

###### *а*4= *а·а·а·а*

Это – *а* в четвертой степени. Здесь *a* – основание, а 4 – показатель степени.

Умножение степеней с одинаковыми основаниями производится просто:

32*·*33= 3*·*3 *·* 3*·*3*·*3 = 35, т.е. 32*·*33= 32+3= 35.

Запишем это параметрами.

*аn· аm = аn*+*m*

Теперь рассмотрим деление.



Или

###### 

Запишем это параметрами.

###### 

После этого вступления, попросите возвести число в степени в степень. Например, пусть ваш ребенок преобразует выражение (32)4 в число со степенью.

Должно получиться:

###### (32)4 =(32) *·* (32) *·* (32) *·* (32) =3*·*3 *·* 3*·*3 *·* 3*·*3 *·* 3*·*3 = 38

или

###### (32)4=32*·*4= 38

Потом попросите, чтобы он записал это же выражение параметрами.

###### (*a*n)m=*a* n · m

Это все была теория. Теперь предложите вычислить, чему будет равно выражение (76)3 : (77)5?

###### 

Теперь предложите вычислить значение следующего выражения

###### 

Прежде, чем ребенок приступит к вычислениям, спросите, одинаковые ли основания у степеней?

Конечно, нет.

А можно ли их привести к одинаковым основаниям?

Можно. Надо представить 49 как семь в квадрате. Получим:



Чтобы закрепить умение действовать по правилам, нужно перерешать множество примеров. Их вы найдете в школьном учебнике. А мы у уже довольно измотанного ребенка спросим, а бывают ли отрицательные показатели степени? Он в отчаянии возведет глаза к небу, но вы все же не отступайте. Скажите, что, конечно, бывают, и мы только что с ними познакомились.

– Где? – воскликнет он.

Рассмотрим последнее правило еще раз



Его можно записать в следующем виде:



Т.е.



Разделим обе части на *an* получим



И наоборот,



Добавим еще одно правило: произведение чисел с одинаковыми показателями степени, равно их произведению в данной степени, т.е.

*an*·*bn*= (*a·b*)*n* .

И наоборот, степень произведения, равна произведению степеней:

(*a·b*)*n* =*an*·*bn*

Пусть верность этого правила, ребенок докажет сам.

Используя последнее правило, вычислим значение выражения



Теперь, предложите выполнить вычисления, делая преобразование только в знаменателе.



А как возводить в степень дробь?

Очень просто, ведь деление и умножение – взаимно обратные действия.

###### 

Например,



У нас показателями степени выступали целые положительные и отрицательные числа. А чему равна степень числа, если его показатель ноль.

Пришли к выводу, что *любое* число в нулевой степени равно единице, т.е.

*a*0 *=*1.

Возводить в степень можно и сложные выражения. Попросите ребенка раскрыть скобки в выражении (*a*+*b*)2.

Если он напишет, что (*a*+*b*)2=*a*2+*b*2, попросите сделать проверку, подставив конкретные числа. Например,

(3+5)2 = 32+52 = 9+25=34.

Но, на самом деле, (3+5)2= 82=64.

Ответы не сходятся!

Пусть еще раз вспомнит, что значит возвести выражение в квадрат? Под знаком квадрата у нас сумма (*a*+*b*).

Следовательно,

(*a*+*b*)2=(*a*+*b*)·(*a*+*b*)=*a*2+*ab*+*ba*+*b*2= *a*2+2*ab*+*b*2

Чтобы каждый раз не делать эти пространные выкладки, можно запомнить, что *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого и второго чисел и плюс квадрат второго числа.* Т.е. можно сразу записывать:

(*a*+*b*)2 = *a*2+2*ab*+*b*2

Проведем вычисление по этой формуле

(3+5)2= 32+2·3·5+52= 9+30+25=64.

Теперь все сходится.

Аналогично,

(*a*–*b*)2 = *a*2–2*ab*+*b*2

*Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого и второго чисел и плюс квадрат второго числа.*

В качестве домашнего задания, предложите ребенку самостоятельно составить формулу сокращенного умножения для куба суммы и куба разности.

# Сокращение дробей и формулы сокращенного умножения

Упростите выражение.

Такой фразой начинается множество заданий в учебнике. Что это значит и для чего это нужно.

Когда-то, давным-давно, когда все вычисления делались вручную на бумаге, предварительно упростить выражение было крайне необходимо для ускорения расчетов. Сегодня, в век компьютеров, особой необходимости в этом нет. Но нам нужно привить ребенку способность упрощать сложную задачу, нужно показать, что это вообще возможно. Поэтому поиграем на моделях.

Пусть ребенок попробует раскрыть скобки в произведении.

(*a*+*b*)(*a*–*b*).

Это он сможет сделать.

Он должен с удивлением и с некоторым восторгом показать, что

(*a*+*b*)(*a*–*b*) = *a*2– *ab* + *ab* – *b*2 = *a*2– *b*2

Удивитесь вместе с ним и выпишите отдельно эту чудесную формулу:

(*a*+*b*)(*a*–*b*)= *a*2– *b*2

Мы получили разность квадратов двух чисел. Следовательно, теперь можно разложить на множители разность квадратов:

*a*2– *b*2 =(*a*+*b*)(*a*–*b*)

Пусть ребенок прочитает эту запись.

Он скажет следующее: «“А” в квадрате минус “б” в квадрате равно “а” плюс “б” умножить на “а” минус “б”».

Отлично!

Теперь пусть прочитает то же самое, но только не параметрами, а терминами.

Ребенок задумался.

Составьте вместе с ним следующее предложение: *«Разность квадратов двух чисел равна произведению их суммы и разности».* Он будет впечатлен.

Теперь попросите упростить выражение.

###### .

Ребенок будет долго смотреть, но не решится что-либо делать. Напомните, что он должен просто делать то, что может, и не делать то, что не может. Может ли он разложить на множители разность квадратов в числителе и квадрат суммы в знаменателе? Конечно, может. Нужно ли это делать? Нужно. Поможет ли это? Пока не знаем, но делаем!



Как здорово получилось!

Следовательно, если нужно вычислить значение выражения



то после упрощения это было бы нетрудно сделать:



Попробуем еще.

Нужно сократить выражение



Со знаменателем ничего не сделать. А вот числитель представляет собой квадрат разности двух чисел. Свернем его по известной формуле сокращенного умножения: (*a*–*b*)2 = *a*2–2*ab*+*b*2.



Здорово!

Теперь дадим выражение посложнее.

Пусть он вычислит значение выражения

 , при *a=*36,7

Если сразу подставить вместо *a* его значение, то получится слишком громоздкое вычисление. Вначале надо упростить выражение.

Спросите, квадраты каких чисел дают, соответственно, 36 и 25? Что получится, если произвести замену чисел на их квадраты в первой скобке?



Получилась разность квадратов. Пусть разложит его на множители:



Осталось подставить результат в основное выражение.



Что делать дальше. Он, скорее всего, будет порываться сделать отдельно вычитание в скобках. Но будет проще, если раскрыть скобки и сделать умножение. Сокращая одинаковые множители в числителе и знаменателе, получим



Теперь можно подставить значение *a=*36,7

–10*a*=–10·36,7=–367.

А что делать, если степень числа дробная?

Надо начинать новый урок.

# Дробные показатели степени

Возведение в степень – вполне самостоятельное математическое действие. Значит, должно быть и обратное ему действие. Действие обратное возведению в степень называется извлечением корня соответствующей степени.

Например, вычисление числа, квадрат которого равен 16, называется извлечением корня квадратного из 16. Записывается это действие с помощью специального символа , который так и называется – корень второй степени или квадратный корень.

###### 

Пусть ребенок прочитает это выражение.

Он прочитает: корень квадратный из шестнадцати равен четырем. Очень хорошо. Теперь, попросите его прочитать то же выражение, только не произнося слово корень. Помогите ему получить: «Вычисли число, квадрат которого равен шестнадцати». Покажите, что короткая запись , заменяет предложение из шести слов.

Соответственно, вычисление числа, третья степень которого равна, например 27, называется извлечением корня третьей степени или извлечением кубического корня из 27. Записывается это действие с помощью специального символа , который так и называется – корень кубический.

###### .

А вот как записывается действие, предполагающее вычисление числа, четвертая степень которого равна 81:

###### 

Здесь, 3 – корень четвертой степени из числа 81.

Запишем эти действия с помощью параметров.

###### =*b*

Под корнем может оказаться и сама степень, т.е. , например . Значение этого выражения трудно вычислить. Но вы предложите вычислить значение выражения . Добейтесь того, чтобы он сам догадался, что результат будет равен семи.

Точно так же, корень числа может быть возведен в степень: .

Например, . Здесь постарайтесь, чтобы ребенок увидел знакомое возведение в степень. Что бы ни было под показателем степени 2, оно должно быть умножено само на себя.

Можете продемонстрировать даже это:

2=·; Δ2=Δ·Δ; (⊗+⊗)2=(⊗+⊗)·(⊗+⊗) и т.д.

Следовательно,



Для выполнения действий с корнями, удобно представить их в виде степени:

###### 

Например, .

Дробная степень – это всегда корень. Например,



Предложите упростить выражение 

Так как теоретический курс у нас был довольно кратким, вначале это задание покажется ребенку тяжелым. Но вы скажите, что просто нужно смело следовать известным правилам.

Представим корни в виде степеней. А при умножении степеней с одинаковыми основаниями, их показатели складываются. Следовательно,



Предложите вычислить значение выражения . Должно получиться:



Вычислим значение выражения



Как извлекать корень из дроби?

Так как мы можем представить корень в виде дробной степени, а действия со степенями нам уже известны, то получается:

###### .

Или просто

###### 

Запишем это параметрами:

###### 

Пусть, теперь ребенок попробует вычислить значение выражения

, при *b*=6

Пусть сделает то, что может сделать.

В числителе показатель степени – сумма. Значит, можно степень разложить на множители.

А в знаменателе – возведение степени в степень, значит, степени надо перемножить, т.е.



Теперь можно подставить значение *b*=6.

*b*2=62=36

Все понятно? Может быть. Давайте проверим. Пусть наш ученик решит уравнение:

###### 

Он, конечно, начнет возмущаться: таких уравнений он никогда не видел. Ничего страшного. Пусть он приведет данное уравнение к виду, который он видел!

У нас в левой части степень. Можно ли и правую часть тоже представить в виде степени?

Можно. 64=43.

Подставим это значение в правую часть.

Получим

###### 

Теперь, пусть сравнит основания степеней. Они равны друг другу. В левой части основание 4 и в правой части тоже 4. Следовательно, показатели степеней тоже должны быть равны. Запишем это.

###### 2*x*–5=3

Это уравнение он уже может решить сам.

# Что логарифм?

Запишем рядом степень числа и корень числа.

###### ;

– Сколько здесь параметров?

– Три.

– Какие?

– *a, b, n.*

– А сколько формул?

– Две.

– Одной не хватает. Какой?

Наверное, той, которая помогла бы вычислить показатель степени *n*. Но как записать параметрами выражение: *вычисли показатель степени n, в которую надо возвести число а, чтобы получилось число b?*

Символ, обозначающий это действие, называется *логарифмом*. Записывается так

###### log*a* *b =n*

Читается: логарифм *b* по основанию *a* равен *n*.

Результат вычисления логарифма есть показатель степени *n*, в который надо возвести число *а*, чтобы получилось число *b.*

Добавим эту формулу к тем двум, что были вначале и получим три формулы, связывающие три параметра.

 ; ; *n=* log*a* *b.*

Понял ли наш ученик, что такое логарифм числа?

Может быть. Но, хорошо бы проверить. Пусть вычислит значение выражения:

###### .

Он скажет, что это невозможно.

– Показателем степени у числа пять стоит логарифм. Это видно?

– Да.

– И чему он равен? Прочитай показатель степени.

– Он равен логарифму 17 по основанию 5.

– И сколько это будет?

– Не знаю!

– И я не знаю. Но ведь логарифм означает показатель степени.

– Да.

– В нашем случае показатель степени чего?

– Числа 5.

– И что должно получиться, если число 5 возвести в эту степень?

– 17.

– Следовательно, логарифм 17 по основанию 5 равен показателю степени, в которую надо возвести 5, чтобы получилось 17.

– Да…

– Повтори, пожалуйста.

– Логарифм 17 по основанию 5 равен показателю степени, в которую надо возвести 5, чтобы получилось 17.

– Отлично. Теперь посмотри еще раз на все выражение. Что ты видишь?

– Я вижу число 5, и у него показателем степени стоит логарифм.

– Т.е., у пятерки показателем степени стоит тоже показатель степени. Ведь логарифм – это показатель степени.

– Да.

– Значит, у пятерки показателем степени стоит другой показатель степени.

– Да.

– Он нам известен?

– Нет.

– А что нам про него известно?

– Известно, что если в эту степень возвести число 5 должно получиться 17.

– Ну, вот! Понятно?

– Нет…

– В общем виде, у числа 5 такой показатель степени, что если в эту степень возвести число 5, то получится число 17. Видишь?

– Да.

– Значит, чему равняется значение всего выражения?

– =17.

– Молодец!

В общем виде это запишется так:

###### 

Это формула может считаться формулой логарифма: **логарифмом** числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести число *а*, чтобы получить число *b*.

Итак, у нас троица

 ; ; *n=* log*a* *b.*

Ясно, что все три – это одна и та же формула, только каждый раз вычисляется свой параметр.

– Все понятно?

– Да.

– Проверим. Реши уравнение

###### log3(х – 7) = 4

– А я таких уравнений еще не видел.

– В прошлый раз ты говорил то же самое. Приведи данное уравнение к виду, который ты видел.

– А как?

– Просто запиши это же выражение в другой форме. Например, в виде степени.

###### 34 = *x*–7

###### 81= *x*–7

###### *x* = 88

Отлично!

Для логарифма можно вывести такие же формулы, как для степени и корня.

**1.** Логарифм единицы равен нулю:

log*a*1*=* 0.

**2.** Если логарифм числа равен единице, то само число равно основанию логарифма:

log*a a=* 1.

**3.** Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

log*a xy=* log*a x +* log*a y*

Здесь, пусть наш ученик докажет это. Скажите только, что надо воспользоваться основной формулой логарифма, которая позволяет выразить число через его логарифм. Выразим *x* и *y* через их логарифмы:

Вычислим произведение *xy*, подставив значения множителей:



т.е.



Теперь спросите, в какую степень надо возвести здесь число *a*, чтобы получилось произведение *xy*? Конечно, в степень (log*a x +* log*a y*).

А как записать, чему равна эта степень с помощью логарифма?

log*a x +* log*a y* = log*a xy*

Доказали.

**4.** Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.



Доказывается это аналогично предыдущему случаю.



Следовательно, показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить отношение , можно записать как логарифм этого отношения по основанию *a*:

.

**5.** Логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания этой степени.



Доказываем так же. Знаем, что:



Возведем обе части в степень *n*.



Следовательно, по определению логарифма, показатель степени, в которую надо возвести число *a,* чтобы получить *xn* есть . Запишем это.



# Уроки и загадки

Вы, наверное, уже поняли, что во всех предыдущих уроках был применен какой-то метод. Что это за метод?

В знаменитой Панчатантре (санскр. – «Пятикнижие») – древнеиндийской книге мудрости, – есть сюжет, который подскажет суть этого метода. Книга начинается так:

*«Давным-давно в южной Индии был город под названием Паталипутра* (*в настоящее время известный как Патна), которым правил справедливый царь Сударшана. Его почитали не только жители государства, но и цари соседних держав. Они часто приезжали к нему, чтобы засвидетельствовать свое почтение и привезти богатые дары. Подданные тоже горячо любили своего царя, но, несмотря на это, раджа был печален. Думал он о своих сыновьях, которые не хотели учиться и вели себя очень дурно. Ведь говорится, что молодость, богатство, власть и безрассудство, равно и как и неразборчивость могут погубить человека, лишенного добродетели. Как сладкая речная вода становится невкусной, когда достигнет моря, так и все эти вещи становятся пороками, когда ими обладает недобрый человек. И еще сказано: «Как от множества звезд нет света, так и от глупых сыновей нет никакого толку. Но подобно луне, освещающей ночное небо, один достойный сын придает блеск всему роду».*

*Грусть все больше снедала сердце царя. Наконец, не в силах выносить глупости своих детей, он созвал тайный совет. «О, наимудрейшие, – обратился он к министрам, – вы знаете, что в материальном мире счастье приносят лишь богатство, хорошее здоровье, красивая и сладкоречивая жена, послушный сын и знание. Разумный человек должен стремиться к знаниям так, словно будет жить вечно. Сын, который не является ни святым, ни ученым – позор для всей семьи. Мысль о моих детях не дает мне покоя. Отказываясь учиться, они глупеют день ото дня. Какой толк от неразумных и непослушных сыновей! Не родившийся или мертвый сын лучше, чем глупый, ведь первые два причиняют страдание лишь один раз, а глупец – на каждом шагу. Как ворона не в почете среди лебедей, так и в собрании ученых мужей необразованный сын не встречает уважения. Родители, не дающие своему сыну образование, являются его врагами. Я должен что-то делать и потому решил обратиться к вам за помощью. Не знает ли кто из вас гуру, который смог бы обучить моих детей благородству и мудрости, которыми должно обладать достойным сыновьям раджи? Как осколок стекла кажется драгоценностью, когда находится рядом с золотом, так же и глупец приобретает опыт через общение с учеными людьми. Человек деградирует, общаясь с низкими людьми, не меняется в обществе равных и совершенствуется, общаясь с теми, кто его в чем-то превосходит. Я ничего не пожалею в награду за его труд».*

*Но советники и министры молчали. Наконец один из присутствующих встал и сказал: «В городе живет святой Вишнушарма. Он очень мудр. Я думаю, ему наверняка удастся обучить царевичей искусству праведной жизни. Пригласи его во дворец».*

*Царь отправил гонцов с подарками в дом святого. Узнав о горе царя, он улыбнулся и сказал: «Как река несет травинку к огромному океану, так же и знание, даже если им обладает простой человек, может привести его к царю».*

*Вишнушарму встретили во дворце правителя с почестями.*

*– Я слышал, что вы очень ученый человек, и потому хочу попросить вас стать гуру для моих сыновей. Однако хочу предупредить, что никому еще не удалось научить их чему-либо. Я опасаюсь, что они не вполне пригодны к обучению.*

*– Как стекло не находят в месторождении топазов, так же бесполезные и негодные сыновья не рождаются в царской династии, – улыбнулся брахман.*

*– Но как вы собираетесь учить их? Они не питают никакого интереса к учебе!*

*– Я буду рассказывать им истории.*

*– Истории.*

*– Узоры на глиняном горшке не изменить после обжига, а впечатления, оставшиеся в умах юных учеников, сохраняются всю жизнь. Поэтому я буду учить их, рассказывая истории, легенды.*

*– Что ж, если вы сможете передать им свои познания, я щедро вознагражу вас.*

*На что мудрец отвечал:*

*– Я вижу, вы мудрый человек, и цените знание. В этом вы правы, знание – это лучшее богатство, потому что его нельзя украсть. Оно бесценно и нетленно. Однако я не продаю своих познаний, ибо я не торговец и пришел сюда не за этим. Мне, старику, деньги ни к чему. В течение шести месяцев я буду обучать ваших сыновей бесплатно.*

*Обрадовался раджа Сударшана благородству учителя и отдал ему в обучение своих трех сыновей. Для проведения занятий им выделили верхнюю террасу на крыше дворца. И вот в назначенное время царевичи пришли на первый урок.*

*– О, брахман, – сказал один из них, – мы слышали, что ты собрался учить нас? Но мы никак не возьмем в толк, зачем нам это?*

*– У нас есть все: богатство, дворец, слуги, – добавил его брат. – Так к чему же нам твои уроки?*

*Учитель, пряча улыбку в бороду, отвечал:*

*– Я не думаю, что смогу научить вас чему-либо, вы и так много знаете. Я пришел, чтобы просто рассказать вам забавные истории. А что касается знания… Может вы слышали, что некогда был царь, очень гордый и надменный человек. Однажды к нему во дворец пришел святой, и царь спросил, какой смысл в его странствованиях, ведь так он никогда не накопит богатств. Тот ему ответил, что истинное богатство – это знание. Царь посмеялся и спросил, не знает ли случайно его будущее, раз он такой знающий. Святой ответил, что знает. «Ну, и что же до меня ожидает?» – полюбопытствовал раджа. «Ты скоро умрешь, но ты так благочестив, что небожители заберут тебя к себе. Там ты будешь гораздо богаче, чем сейчас. Однако есть одна проблема. В твоем дворце будет множество комаров, и хотя у тебя будет прекрасная сетка от них, в ней будет дыра, через которую они будут тебя кусать». Царю предсказание понравилось, и он уверил мудреца, что просто заштопает дыру, на что святой возразил: «План хорош, но ты не учел того, что в раю нет иголок. Поэтому, когда ты будешь умирать, позаботься о том, чтобы взять иголку с собой». – «Но как я смогу взять с собой иголку?» – «Понятия не имею, – отвечал святой. Но если ты даже иголку не можешь взять с собой, почему ты так гордишься своим земным богатством?»*

*Царевичи озадаченно переглядывались.*

*– Есть нечто более ценное, чем деньги. Знание превосходит материальное богатство, – продолжал Вишнушарма, – так как оно является причиной приобретения всего остального, и когда его раздаешь, оно лишь увеличивается. Его не тяжело нести, и никто не может силой отобрать его.*

*– В этом есть какой-то смысл, – сказал третий принц, устраиваясь поудобней.*

*– Расскажи что-нибудь еще, – попросил второй.*

*– Мы послушаем, – согласился со сказанным первый.»*

Далее мудрец предложил для начала загадку, которая на первый взгляд казалась неразрешимой. И когда царевичи уверились в том, что ответа как будто нет, он привел такое простое и красивое решение, что они замерли в восхищении, но тут же стали убеждать, что они бы и сами догадались. Тогда он предложил еще одну задачку, о которой царевичи сказали, что она уж точно не имеет решения. Но после объяснений учителя, решение опять оказалось таким простым и красивым, что царевичи от досады кусали себе локти... Они стали требовать еще задачку, уверяя, что на этот раз они точно отгадают. Но мудрый учитель предложил вначале записать предыдущие решения, чтобы не забыть. Так они стали совершенствоваться в письме и через это в учебе. Через полгода, записанные ими с помощью учителя поучительные истории, составили пять книг – Панчатантру.

Вам надо обязательно иметь ее дома.

Так, а где наш ребенок?

# Как описать положение тела в пространстве?

– Где гуляет этот ребенок в такой поздний час?

Это вопрос, который очень часто задают родители. Правда, не каждый ребенок может на него ответить. Поможем ему в этом.

Прежде всего, отметим, что этот вопрос в точности совпадет с основной задачей механики: описанием положения тела в пространстве в любой момент времени. Так что, вопрос этот серьезный, и вы не должны быть особо пристрастны к невразумительным ответам ваших чад.

Для начала возьмем задачку попроще. Попросите вашего ребенка объяснить, где живет один из его друзей. Он, скорее всего, назовет его адрес; например, улица Строителей, дом 5, квартира 17. Но вы можете сказать, что вам этот адрес ничего не говорит, т.к. вы не знаете, где находится улица Строителей. Ребенок начнет махать руками и рассказывать, что надо проехать туда и туда…

Здесь, можно блеснуть своей эрудицией и заявить, что был такой древнекитайский мудрец по имени Конфуций, который как-то сказал: если показываешь направление, не показывай рукой! И дальше с важным видом пояснить мысль Конфуция: человеку дан язык, чтобы описывать то, что надо сообщить; а конечностями размахивают бессловесные твари или неучи. Потом, не давая опомниться, спросить:

– А в кино ты ходишь?

– Конечно, хожу.

– А как ты находишь свое место в зрительном зале?

– По билету.

– А как по билету?

– А там написано, какой ряд и какое место.

– Допустим, фильм уже начался. В зале темно. Как найти свое место!

– Там есть дежурный с фонариком, он и покажет…

В самом деле: зачем учить географию, если кучер отвезет!

Но, все-таки? Допустим, 8-й ряд, 10-е место. Откуда начинать отсчет рядов? Наверное, отсчет идет от чего-то, что видно из любого места зрительного зала. А что в зрительном зале видно из любой точки? Конечно экран! Вот от экрана и отсчитаем восемь рядов.

А место? Мы читаем и считаем слева направо. Следовательно, если смотреть от экрана, то слева направо отсчитываем десять мест… Вот – наше! Но там уже кто-то сидит... Что это значит?

– Это значит, что кто-то сел на мое место. Его надо попросить…

– А он показывает свой билет, в котором тоже указано: 8-й ряд, 10-е место.

– Значит, в кассе напутали.

– Что делать?

– Позвать дежурного по залу.

– Дежурный посмотрел оба билета и сказал, что в кассе ничего не напутали.

– Но так не бывает!

– Бывает. Насколько я помню, на билете еще что-то бывает написано.

– Время!

– Верно. Один из вас пришел не на свой сеанс.

Итак, нужно знать: откуда считать, куда считать, сколько считать и… когда считать! Следовательно, если мы впервые идем в гости к нашему другу, то он должен сообщить нам все четыре параметра: откуда, куда, сколько и когда. Когда? – определить просто, достаточно назвать время. А вот как определить откуда, куда и сколько? Точно так же как и в кинозале: надо найти ориентир, положение которого было бы всем известно. Допустим, ЦУМ – это начало отсчета. От ЦУМа строго на восток – это направление. Пройти два квартала – это количество.

Итак, положение тела в пространстве можно определить только относительно других тел, чье положение известно. Здесь появляется соответствующий термин – *координата*. Правда, мало найдется ребят, которые могут сразу дать определение термину координата. Большинство ребят ошибочно считают координату точкой. Наверное, потому что координату обычно обозначают одной буквой, например *х*. Давайте разберемся.

Нам нужно описать положение дома так, чтобы собеседник понял, где он находится, и смог бы его найти. Например, пусть нужный дом находится в четырех кварталах восточнее ЦУМа. Здесь ЦУМ – начало отсчета. Направление на восток – известное направление. А квартал – единица измерения расстояния. Графически это можно изобразить следующим образом:

восток

**ЦУМ**

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□

□□□□□

□□□□□

1 квартал 2 квартал 3 квартал 4 квартал 5 квартал

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□

□□□□□

□□□□□□□□□□

Описание положения дома в данной системе будет: 4-й квартал на восток от ЦУМа.

Если мы просто скажем, что дом находимся в четырех кварталах от ЦУМа, то дом нелегко будет найти сразу. Ведь в четырех кварталах от ЦУМа находятся 4 дома: на севере, востоке, юге и западе. Но каждый раз говорить, что нужный дом находится в 4-х кварталах на восток от ЦУМа можно в обыденной речи, а нам нужна универсальная модель, отвечающая требованиям экономии и точности. Нам нужно *определение –* предельно краткое описание.

# Что такое координата?

Обозначим точку отсчета буквой «О». Проведем направленную прямую, проходящую через эту точку и обозначим ее буквой «Х*».* Направленная прямая будет называться осью ОХ. Разобьем ее на равные отрезки в масштабе одно деление – 1 метр. Получили простейшую систему, позволяющую описать положение чего-либо в пространстве (рис. 60).

●

##### О 1 2 3 4 Х, м



Итак, нам известны: начало отсчета, направление отсчета и единица отсчета (масштаб).

Если нами получена информация о том, что некоторый предмет (тело) находится на расстоянии 3 метра от начала отсчета в направлении ОХ, то мы понимаем, где оно! (рис. 61).

●

##### О 1 2 3 4 Х, м



Мы получили отрезок на оси между началом отсчета и положением тела. Его длина равна 3 *м*. Каждый раз положение тела будет определяться подобным отрезком. В общем случае величина отрезка есть *ох.*

●

о 1 2 3 4 *х, м*

●

О *х* Х*, м*

Величина *ох* и есть координата. Но начало отсчета всегда одно и то же. Исходя из принципа экономии, можем первую букву «о» опустить и обозначить длину отрезка только одной буквой *х.*

Следовательно, положение тела в данном случае, может быть обозначено только одним параметром *х* и он равен 3 метрам.

Допустим, другое тело находится тоже на расстоянии 3 метра от начала отсчета, но в противоположном направлении. Отсчет в противоположном направлении обозначим знаком «–» (минус).

Так как у нас уже два тела, координату первого обозначим *х1*, а второго обозначим *х2.*

●

-3 -2 -1 О 1 2 3 4 Х*, м*

*х*2 *х*1

В данном случае *х1 =* 3 *м*, *х2* = –3 *м*.

Еще раз отметим, что координата – это не точка *х*, а отрезок *ох*. Первую букву мы убрали по принципу экономии (т.к. начало отсчета всегда одно и то же).

Итак, зная координату тела, мы знаем, откуда считать, в каком направлении считать и сколько. Сделать это нам помогают начало отсчета и направленная прямая, разбитая на равные отрезки в соответствии с выбранным масштабом – *система координат*. Добавим к ней отсчет времени и получим *систему отсчета.*

Теперь мы можем сообщить, где находится данное тело в данный момент времени. Параметр, описывающий положение тела в пространстве называется *координатой*?

Если нам сообщили или мы сообщили, в каком направлении и на каком расстоянии от известного места находится объект, неужели этого не достаточно? Для чего вводить координаты и оси?

В самом деле, если известно, откуда, куда и сколько, то больше ничего как будто не нужно. Но как описать, сколько и куда, если объект не находится на оси (на известном направлении)?

Спросим еще раз: с помощью чего определяются положения различных городов, стран и континентов? Конечно, с помощью карт. Географические карты – величайшее изобретение. Карты позволяют вычислить расстояния и направления, которые иначе пришлось бы измерять непосредственно на местности. А это не всегда бывает возможным.

Простейшая карта нами была построена на предыдущем уроке. Но это для случая, когда на деревне одна улица… А если их десять?

В самом деле, что делать, если тело расположено в стороне от известного направления?

Прежде всего, отметим, что тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь, называется *материальной точкой* или просто точкой.

Пусть точка А находится в стороне от оси ОХ (рис. 64). Как описать ее положение, как вычислить ее координату?

●

-3 -2 -1 О 1 2 3 4 *Х, м*

##### • А



Нам известно откуда считать: начало отсчета – «О». Нам известно одно направление – ОХ. Но направление на точку А не совпадает с направлением ОХ. Что делать?

**Вариант 1-ый.** Построим еще одну ось с началом отсчета в точке «О», но направленную перпендикулярно первой оси. Пусть это будет ось ОУ (рис. 65).

●

##### -3 -2 -1 О 1 2 3 4 Х, м

##### • А

##### У, м

##### 2

##### 1

##### 

##### – 1

##### –2

##### •

##### хА

##### yА •

Ах



Чтобы попасть в точку А, надо пройти по направленному отрезку ОА. Но это направление нам не известно. Нам известно направление ОХ и направление ОУ.

Каждая точка на плоскости будет иметь свой направленный отрезок, начинающийся в точке О. Они как радиусы, исходят из общего центра и называются радиус-векторами. Опустим перпендикуляры из начала и конца радиус-вектора на ось ОХ. Точки пересечения перпендикуляров и оси ОХ, называются проекциями соответствующих точек (начала и конца вектора) А отрезок на оси ОХ между проекциями начала и конца радиус-вектора, называется проекцией радиус-вектора на ось ОХ.

Проекция, в отличие от отрезка, может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от направления самого радиус-вектора. Следовательно, *координатами точки называются величины проекций ее радиус-вектора на соответствующие оси.*

В нашем случае о*х*А– проекция радиус-вектора ОА на ось ОХ. Следовательно, *х*А – координата *х* точки А. Она еще называется *абсциссой; у*А – координата *у* точки А или *ордината*.

Соответственно, *х*А = 3 *м*, *у*А = 2 *м*. Координаты точки А записываются следующим образом: А (*х;у*).   
В нашем случае – А (3;2).

Теперь, попробуем решить задачку.

*Задача 1. В прямоугольной системе координат без помощи линейки вычислите расстояние между двумя точками А*(*1;2) и В*(*4;6).*

Конечно, если бы была линейка, то измерить длину отрезка АВ не составило бы труда. Но по условию задачи линейкой пользоваться нельзя. Воспользуемся системой координат и нашими предыдущими уроками. Вначале построим чертеж, на котором имеют место быть все известные нам термины: координаты, начало координат, оси координат, проекции точек.

Нам нужно вычислить расстояние между точками А и В, не используя измерения,

Достроим перпендикуляр, опущенный из точки А на ось ОУ вправо до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки В на ось ОХ. Обозначим точку пересечения буквой С.

##### У, м

6

5

4

3

2

1

##### 

##### –1

##### –2

##### • В(4;6)

##### С

##### А(1;2)

●

##### Х

●

##### -3 -2 -1 О 1 2 3 4 5 6

##### 

У нас получился прямоугольный треугольник АВС.

В треугольнике АВС нам известны длины катетов АС и ВС. Они соответственно равны 3 *м* и 4 *м*.

По теореме Пифагора,

АВ2 = АС2 + ВС2.

АВ = 

Следовательно, АВ =  = 5 (*м*)*.*

Задачка решена.

Но это графический способ решения. А можно ли обойтись без построения чертежа?

Из рисунка видно, что длина катета АС равна разности координат *хВ* и *хА*.

Следовательно, АС = *хВ – хА .*

Аналогично, для катета ВС:

ВС = уВ – уА .

Теперь можем записать универсальную формулу для вычисления расстояния между двумя точками с известными координатами:

АВ = .

Итак, если нам известны координаты двух точек, мы можем *вычислить* расстояние между ними. Причем, двумя способами: графически и алгебраически.

Вывод: система координат позволяет вычислять параметры, которые трудно или невозможно измерить, с помощью параметров, которые измерить легко.

**Вариант 2-ой.** Соединим отрезком начало отсчета с точкой А. Мы можем измерить длину этого отрезка и угол между ним и осью ОХ.

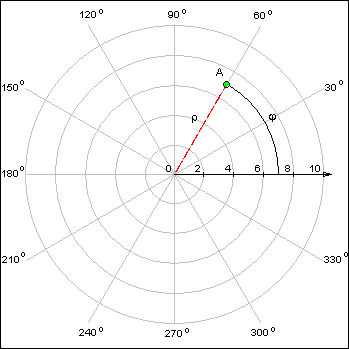
●

##### α

##### • А

##### -3 -2 -1 О 1 2 3 4 Х, м

Здесь положение тела может быть описано следующим образом: точка А находится на расстоянии ОА от начала отсчета под углом α к известному направлению ОХ.



Здесь начало отсчета «О» называется полюсом. Положение тела определяется расстоянием от полюса до точки и углом между известным направлением и направлением на точку, измеренным против часовой стрелки.

Данная система координат называется *полярной*.

Итак, у нас есть два варианта описания положения тела в пространстве: 1-ый – с помощью прямоугольной (или Декартовой) системы координат; 2-ой – с помощью полярной системы координат.

А что делать, если координаты тела изменяются?

# Что такое изменение величины?

Как описать положение тела, если его координаты изменяются?

Задав этот вопрос, спросите вашего ребенка, все ли слова в нем понятны?

«Описание» ему знакомо. «Координата» – тоже! Он смело скажет, что все понятно.

Теперь спросите, а что такое изменение?

– Ну, изменение – это когда что-то меняется…

– У нас правило: в определении не должно быть слова, однокоренного с определяемым термином.

–…?

– У тебя было пять яблок, стало семь. Чему равно изменение количества яблок?

– Двум!

– Верно. У тебя было семь яблок, стало пять. Чему равно изменение количества яблок?

– Двум!

– Опять двум? Хорошо. У тебя количество яблок изменилось на два. Больше их стало или меньше?

– Ну, в первом случае – больше, а во втором – меньше.

– А если нам неизвестны предыдущие случаи? Например, тебе сообщили, что твой счет в банке изменился на миллион рублей. Денег стало больше или меньше? Радоваться или огорчаться?

–…?

Изменения происходят только во времени. Время имеет только одно направление. Поэтому для нас имеют смысл фразы «было» и «стало».

*Изменением величины* называется разность между последующим и начальным его значениями.

Было пять, стало семь. Здесь, начальная величина пять, последующая – семь. Следовательно:

###### 7 – 5 = 2.

Изменение равно двум.

Было семь, стало пять. Здесь, начальная величина семь, последующая – пять. Следовательно:

###### 5 – 7 = –2.

Изменение равно минус двум.

Если изменение величины положительно, то величина растет, а если отрицательна, то она уменьшается.

Следовательно, счет в банке вырос на миллион. Ведь изменение положительно.

Изменение параметра – разность (difference). Поэтому изменение параметра обозначается той же буквой, что и параметр, только перед ним ставится греческая буква дельта (Δ).

Например, изменение координаты *x* будетΔ*x*.

##### 

##### Δx

●

##### О

##### X

##### x

##### x0

Если *x*0 – начальная координата, а *x* – конечная, то изменение координаты равно:

###### Δ*x* = *x – x*0.

Задача заключается в вычислении конечной координаты в любой момент времени.

Будем считать, что за равные промежутки времени, координата меняется на одинаковую величину.

Пусть, за 1 секунду координата меняется на 5 метров. Тогда, легко можно вычислить, какой будет координата через, например, семь секунд. Это 35 м.

Обозначим изменение координаты за единицу времени буквой *v*, а интервал времени буквой t.

Тогда, изменение координаты за любой промежуток времени будет:

###### Δ*x* = *v·*t.

Изменение величины в единицу времени называют скоростью изменения величины или просто *скоростью*. Скорость, здесь, термин, обозначающий связь между двумя другими терминами. Такие термины называются *понятиями*. Следовательно, скорость – понятие. Величина скорости обозначается, буквой *v* – первая буква английского *velocity* – скорость.

Δ*x*  – буквы, обозначающие величину изменения координаты, т.е., это параметр. Его можно измерить

t – буква, обозначающий промежуток времени, т.е., это параметр. Его можно измерить.

А что такое *v*? Тоже параметр, потому что это буква… Но, величину чего она обозначает?

Она обозначает величину одного параметра, приходящуюся на единицу другого. Такие параметры называют **удельными величинами** или **коэффициентами.**

Если тело движется равномерно и прямолинейно вдоль оси OX, то изменение координаты равно перемещению тела. Обозначим величину перемещения буквой s. Тогда, s = Δ*x*. Значит,

###### s= *v·*t.

Эта формула нам уже встречалась, когда мы решали задачи на движение. Здесь, *v* – коэффициент, который связывает параметры s и t. Он показывает, сколько S приходится на единицу t, т.е. какое перемещение совершает тело за единицу времени.

Например, если скорость автомобиля 60 *км*/*ч*, это значит, что он проходит 60 *км* за 1 *час*. Зная, какой путь он проходит за 1 час, мы может вычислить, какой путь он пройдет за 2 часа, за 5 часов и т.д.

s= *v·*t – это основная формула. Из нее можно вывести формулы для вычисления скорости и времени. Для этого просто представим эту формулу как уравнение и решим его вначале для *v.* Для этого разделим обе части уравнения на t.

s= *v·*t ⇒ s/t = *v*

t t

Теперь решим его для t. Для этого разделим обе части на *v*.

s= *v·*t ⇒ s/*v* = t

*v* *v*

Для того чтобы вычислить среднюю скорость движения достаточно весь пройденный путь разделить на все время движения. Получим путь, пройденный в единицу времени – удельную величину, которая помогает нам в вычислениях.

# Что такое функция?

В разговоре с учеником оброните фразу: «Это не моя функция!» или «А у тебя есть аргумент?». Получив любой ответ, спросите, а что такое функция? и что такое аргумент?

Нам знакомы параметры, формулы и уравнения. Пора перейти к функции. Тем более, что мы уже давно ими пользуемся. Надо просто их различить, описать и построить определение.

Вначале дети знакомятся с параметрами. Но параметры для них – величины постоянные, не меняющиеся. Например, параметры в нашей первой формуле для длины окружности *c*=2π*r*. В каждом конкретном случае параметры *c* и *r* имеют только по одному значению, т.е. для данной окружности эти величины постоянные.

Но мы уже познакомились с изменяющимися величинами. Например, с изменением координаты с течением времени.

Параметры, обозначающие изменяющиеся величины, называют **переменными параметрами** или просто **переменными**.

При этом различают **зависимые и независимые переменные.**

Например, перемещение зависит от времени.

Параметрически это записывалось так:

###### s = *v*t

Здесь, t (величина времени) – независимая переменная; s (величина перемещения) – зависимая переменная; *v* (скорость перемещения) – коэффициент связи.

Зависимая переменная будет называться **функцией**, а независимая – **аргументом.**

Связь между функцией и аргументом в общем виде будет записывать так:

###### *y = f (x)*

Следовательно, в общем виде связь между перемещением и временем будет записываться так:

###### s=*f* (t)

Говорят, перемещение (S) есть функция времени (t). Время (t), здесь – аргумент.

Любая уже известная нам формула может быть переведена в функцию, если заменить в ней постоянные параметры на переменные.

Например, длина окружности зависит от длины радиуса:

###### c=*f* (r);

площадь квадрата есть функция длины его стороны

###### S= *f* (a).

Наглядно продемонстрировать, как будет изменяться одна переменная, при изменении другой позволит график функции.

Построим график функции  *y=*2*x +*3*.*

Так как переменная *х* – аргумент, т.е. независимая переменная, то можем присвоить ей любое значение. А переменная *у ­–* функция, т.е. зависимая переменная, ее значение будет зависеть от того, какое значение получит аргумент *x*.

Например,

если *x* = 0, то *y* = 2·0+3 = 3;

если *x* = 1, то *y* = 2·1+3 = 5;

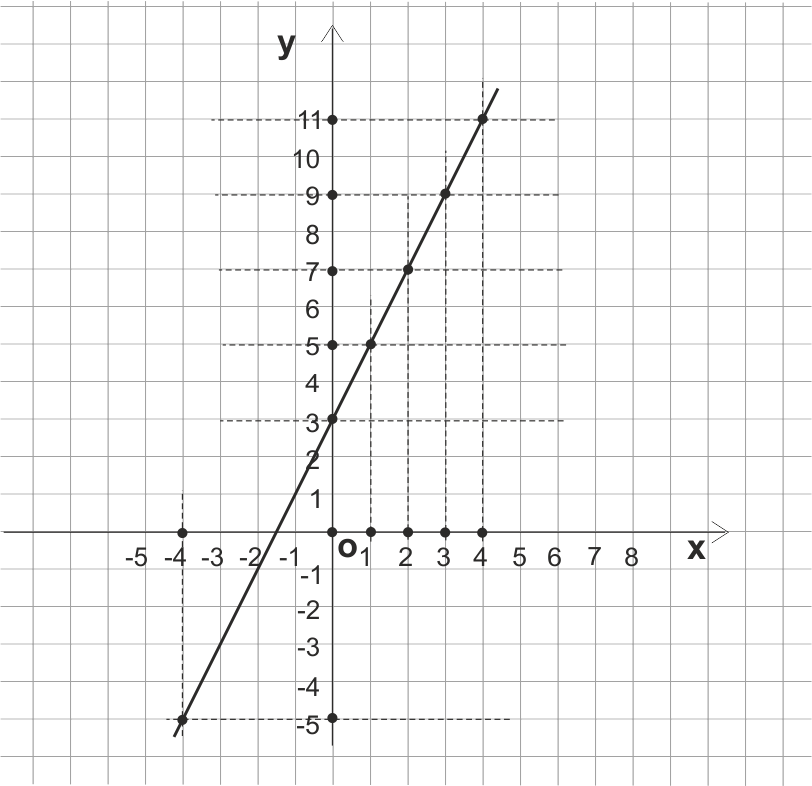
если *x* = 2, то *y* = 2·2+3 = 7;

если *x* = 3, то *y* = 2·3+3 = 9;

если *x* = 4, то *y* = 2·4+3 = 11;

и т.д.

Построим систему координат. Найдем все эти точки.



Мы знаем, что если *x* = 0, то *y*=3. Отметим эти две точки соответственно на осях *ox* и *oy*. Восстановим перпендикуляры к осям из этих точек. Отметим точку их пересечения. В нашем случае, точка пересечения расположена прямо на оси *oy*.

Если *x* = 1, то *y*=5. Отметим эти точки и восстановим к ним перпендикуляры. Отметим точку пересечения этих перпендикуляров.

Точно так же отметим положение точек для случая, когда *x* = 2, *x* = 3, *x* = 4.

Теперь соединим получившиеся точки пересечения перпендикуляров. Получилась прямая линия.

Нетрудно заметить, что все точки расположенные на этой прямой соответствуют функции *y=*2*x +*3.

Например, отметим на графике точку *x*= –4. Восстановим из этой точки перпендикуляр к оси *ox*. Из точки пересечения этого перпендикуляра и нашей прямой, проведем перпендикуляр к оси *oу*. Точка пересечения этого перпендикуляра и оси *оу* даст точку (–5). Она соответствует значению функции, вычисленной по формуле:

###### *y=*2*x +*3= 2·(–4)+3= –5.

Поэтому функцию, независимая переменная которой имеет первую степень, называют линейной функцией.

Здесь *x* имеет первую степень. Просто первая степень, как мы знаем, не пишется, так как *x*1=*x* . В общем виде линейная функция записывается так

###### *y* = k*x*+b,

где k и b – любые числа.

Построим график еще одной функции:

###### *y* = *x*2

Здесь,

если *x* = 0, то *y* = 02 = 0;

если *x* = 1, то *y* = 12  = 1;

если *x* = 2, то *y* = 22  = 4;

если *x* = 3, то *y* = 32  = 9;

Для удобства построим таблицу значений независимых переменных и соответствующих им значений функций.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
| *у* | 0 | 1 | 4 | 9 | … |

Построим систему координат, отметим соответствующие точки и соединим их плавной кривой

Теперь присвоим аргументу (независимой переменной) отрицательные значения.

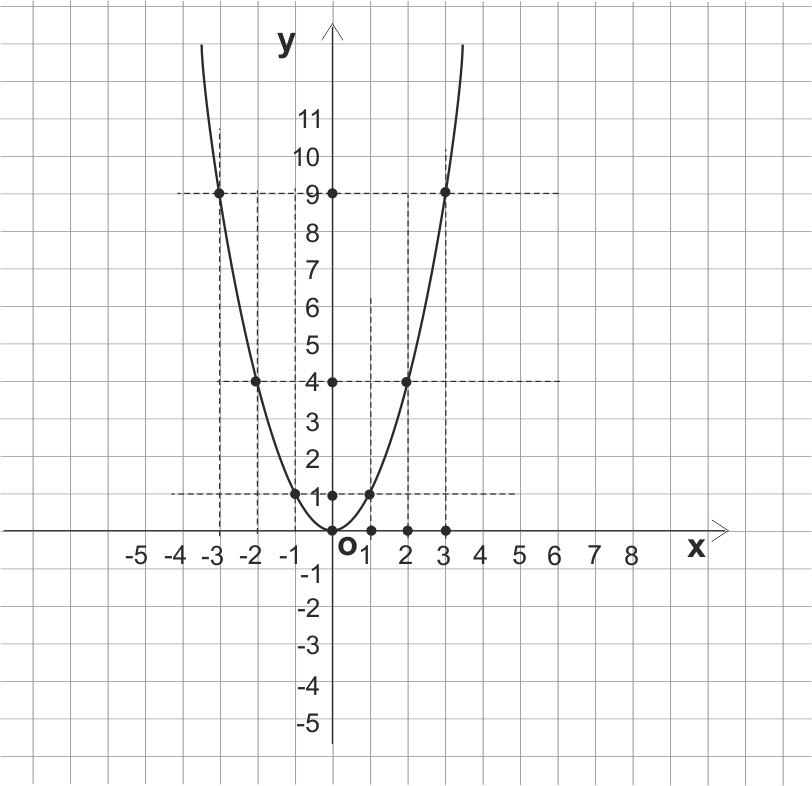
###### *y* = *x*2

если *x* = –1, то *y* = (–1)2  = 1;

если *x* = –2, то *y* = (–2)2  = 4;

если *x* = –3, то *y* = (–3)2  = 9;

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | –1 | –2 | –3 | … |
| *у* | 1 | 4 | 9 | … |



Это график квадратичной функции. Полученная кривая называется **параболой**. Ветви параболы симметричны относительной прямой, проходящей через ее вершину и параллельную оси *oy*.

В общем виде квадратичная функция записывается так:

###### *y* = *ax*2*+bx +c*,

где *a, b* и *c* – любые числа, но *a* ≠ 0.

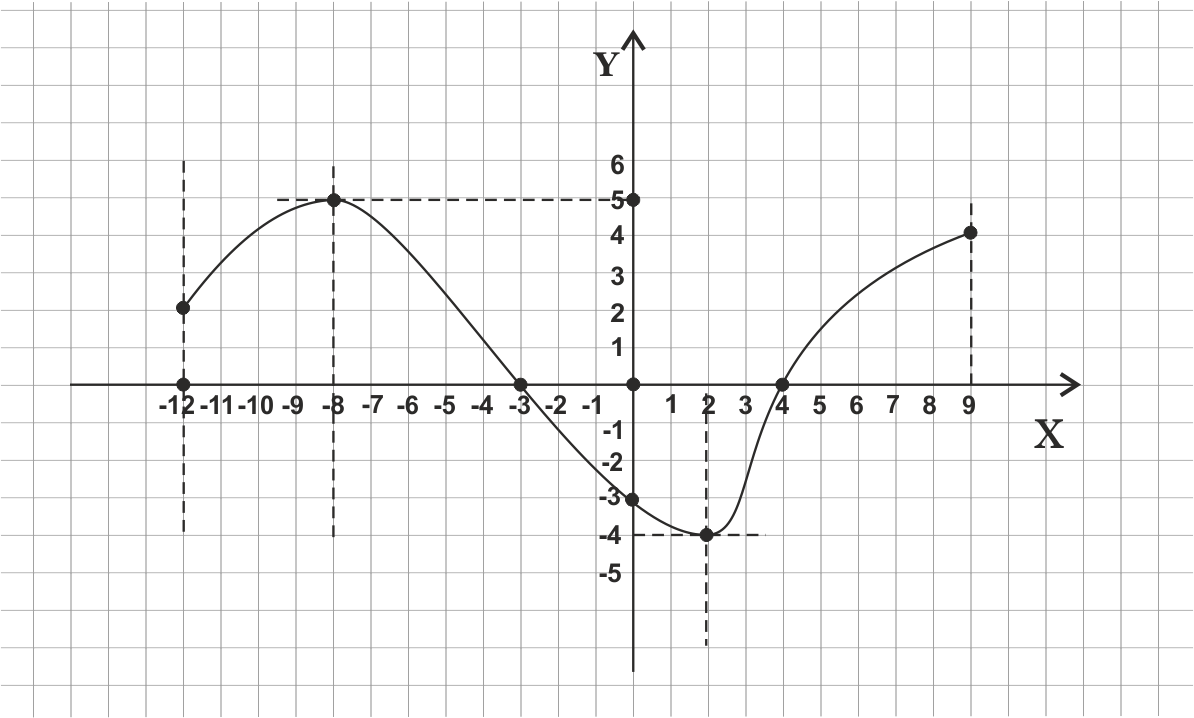
При *а* = 0, квадратичная функция обращается в линейную.

# Что значит исследовать функцию?

Итак, функция – параметр, величина которого зависит от другого параметра, аргумента. Описание, как именно меняется функция, называется исследованием или анализом функции.

Попробуем исследовать изменение функции по ее графику.

Пусть у нас уже есть график функции *y*=*f* (*x*). Рис. 72.





Сможет ли исследовать эту функция ваш ребенок? Он, скорее всего, скажет, что нет.

Теперь приведем ряд вопросов, на которые требуется ответить, чтобы составить анализ. На каждый из них в отдельности он ответить сможет.

**1.** Какова область определения функции? Т.е., в каких пределах значений аргумента *x* определена функция *y*?

(Смотрим значения *х* на оси ОХ. В пределах от *x*=–12 до *x*=9, или область определения функции: *x*∈[–12;9]).

**2.** Какова область значений функции? Т.е., в каких пределах лежат значения самой функции?

(Значения функции смотрим на оси OY: в интервале от *y*=–4 до *y*= 5; область значений функции: *y*∈[–4;5]).

**3.** Каковы нули функции? В каких точках график функции пересекает ось OX? Т.е., при каких значениях аргумента *x* функция обращается в ноль?

(Здесь, *x*1= –3 и *x*2=4)

**4.** В каких точках график пересекает ось OY? Каковы значения функции при равенстве аргумента нулю, т.е. при *x*=0?

(Здесь, это точка с координатой *у*=–3).

**5.** Каково максимальное значение функции?

(*у*max= 5).

**6.** Каково минимальное значение функции?

(*у*min= –4).

**7.** В каких интервалах значений аргумента, функция не меняет свой знак?

(Таких интервалов три: (–12;–3),(–3;4),(4;9)).

**8.** В каких интервалах значений аргумента *x* функция *y* возрастает?

(Таких интервалов два: (–12;–8), (2;9))

**9.** В каких интервалах значений аргумента *x* функция *y* убывает?

(Такой интервал один: (–8;2)).

# Решение неравенств методом интервалов

Изменение аргумента в заданном интервале значений, изменяет значения функции. Значения функции (величины *y*) могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Причем, изменение знака функции происходит в точке *y*=0. И, если функция непрерывна, то после изменения знака, например, с минуса на плюс, новое изменение может быть только с плюса на минус.

Рассмотрим график некоторой функции *y*=*f*(*x*), заданной в интервале [*x*1; *x*5]. Рис. 73.

**+**

*x*3

*x*2

*x*1

**+**

*y*

*x*

*x*5

*x*4

**–**

**–**



Здесь, в интервале значений аргумента от *x*1 до *x*2 функция положительна (*y*>0). Далее, в точке *x*2 она меняет знак с плюса на минус и остается отрицательной до значения аргумента, равного *x*3. В точке *x*3 функция опять меняет знак, теперь с минуса на плюс, и остается положительной до значения аргумента, равного *x*4. В точке *x*4 функция меняет знак с плюса на минус.

В точках *x*2,  *x*3 и *x*4 , где функция меняет знак, значение самой функции равно нулю.

Это обстоятельство поможет продолжить решение неравенств, начатое на одном из предыдущих уроков (стр. 146).

Рассмотрим неравенство:

###### (*x*–7)(*x*+3)(*x*–4) > 0

Чтобы получить ее решение, представим это неравенство в виде функции:

###### *y* = (*x*–7)(*x*+3)(*x*–4) > 0

При каких значениях аргумента *х*, функция *у* обращается в ноль?

Это значения: *x*1=7, *x*2=–3, *x*3=4.

Именно в этих точках график функции пересекает ось ОХ и, соответственно, функция меняет знак. Обозначим эти точки на оси ОХ. Строить ось ОУ нет необходимости, так как нам не нужны конкретные значения функции *y*. Нам нужны только интервалы значений аргумента *х,* в которых значения функции больше нуля.

–3 4 7 *х*



На чертеже получились четыре интервала. Но, какие знаки у функции в каждом интервале?

Рассмотрим крайний правый интервал. Здесь значения аргумента больше 7. Если подставить в формулу нашей функции значения аргумента *х*, которые больше 7, то величины во всех трех скобках положительны. Следовательно, в правом крайнем интервале значения функции будут положительны. Значит, справа налево в каждом интервале, знак будет меняться на противоположный. Сами точки не попадают в интервал, т.к. у нас строгое неравенство. Поэтому обозначим их выколотыми точками (пустыми кружочками).

**+**

**–**

**–**

**+**

–3 4 7 *х*

Таким образом, решением нашего неравенства

###### (*x*–7)(*x*+3)(*x*–4) > 0,

будет

###### *х* ∈(–3; 4)(7; +∞).

Здесь интервал ограничены круглыми скобками, что значит сами предельные точки не включены.

Если бы неравенство был бы не строгим, то кружочки были бы сплошными, а скобки — квадратными.

Если (*x*–7)(*x*+3)(*x*–4) ≥ 0, то *х* ∈[–3; 4] [7; +∞).

Этот метод решения неравенств, называется *методом интервалов*.

# Что такое синус угла?

– Можно ли вычислить длину катета, если измерена длина гипотенуза?

– Конечно! По теореме Пифагора.

– Хорошо. Пусть длина гипотенузы равна 10 *см*. Чему равна длина катета?

– А чему равен второй катет?

– Неизвестно.

– Тогда, длину гипотенузы вычислить нельзя.

– А если известен угол между катетом и гипотенузой?

– Ну, не знаю!

– А чему равен угол между катетами?

– 90°.

– А сумма двух других острых углов?

– Тоже 90°.

– Почему?

– Потому что, сумма углов в треугольнике равна 180°.

– Это надо доказать.

– А как? Я уже забыл!

– Построим треугольник. Проведем через его вершину прямую, параллельно основанию. Расставим обозначения получившихся углов. Как они называются?

1

2

3

4

5

– Углы 4 и 1 – внутренние накрест лежащие. Они равны. Углы 5 и 3 – тоже.

– А чему равна сумма углов 4, 2 и 5?

– 180°.

– Отлично! А чему равна сумма углов 1, 2 и 3?

– ?

– Замени в первой сумме углы 4 и 5 на равные им углы 1 и 3.

– Получится тоже 180°.

– Доказали!

В прямоугольном треугольнике один угол всегда равен 90°. Следовательно, сумма двух других углов равна:

###### ∠α + ∠β = 90°

Изменение одного из них всегда приводит к изменению другого. Чтобы это выполнялось, должны меняться и величины катетов и гипотенузы. В свою очередь, изменение длины любого из катетов прямоугольного треугольника приводит к изменению острых углов (α и β) и длины гипотезы.

Рассмотрим каждый случай подробнее.

Пусть катет *b* будет неизменным. Тогда, любое изменение угла α приведет к изменению длины катета *а*  и гипотенузы *с*. (Рис. 77).

B

##### 90°

##### b

C

β

##### a

##### c

α

А



Теперь, пусть катет *a* остается неизменным. Тогда любое изменение угла α приведут к изменению длин катета и гипотенузы. (Рис. 78).

B

A

##### b

C

##### c

β

##### a

α

##### 90°



Таким образом, в прямоугольном треугольнике между острым углом и парой катет–гипотенуза есть какая-то связь.

*Величина катета, противолежащего данному острому углу, приходящаяся на единицу длины гипотенузы, называется* ***синусом*** *угла.*

Чтобы вычислить величину синуса угла, нужно разделить длину противолежащего этому углу катета на длину гипотенузы.



Следовательно, синус угла – удельная величина, т.е. величина, получающаяся в результате деления и показывающая, сколько и чего приходится на единицу чего-то.

Основная формула синуса выглядит так:

*a* = (sin α)‧*c*

Сегодня можно просто взять хороший калькулятор, ввести значение угла и сразу получить величину его синуса. Зная величину синуса угла и длину гипотенузы, можно вычислить величину катета и наоборот. Главное помнить, что синус угла показывает величину противолежащего ему катета, а не прилежащего.

*Косинусом* угла, соответственно, будет называться величина прилежащего ему катета, приходящаяся на единицу длины гипотенузы. Чтобы вычислить косинус угла, надо разделить длину прилежащего катета на длину гипотенузы.



# Как вычислить синусы 30, 45 и 60 градусов?

Достаточно теории. Теперь поиграем в задачки. Интересно, чему равен синус угла в 30°.

Ясно, что детям это совершенно не интересно.

А вы сообщите, что для решения этой задачки у них есть все, что нужно. А вот смогут ли они, имея все, решить ее? Это уже вопрос принципа, это соревнование, это доказательство дееспособности. Здесь отказ будет восприниматься как поражение. А проигрывать дети не захотят.

Догадливый ребенок скажет, что нужно взять калькулятор и набрать 30 и нажать на «sin». Все верно. Только, что даст этому догадливому ребенку знание того, что калькулятор покажет 0,5? Понимает ли он, что значит этот ответ, и как он получается на практике? И сможет ли он сам в следующий раз поставить задачу перед калькулятором?

Много вопросов. Нельзя долго ждать ответа. Надо ребенку вовремя помочь. Надо предложить ему поиграть в несколько иную игру: вы ему один раз быстро показываете, как задачка решается, а он должен будет повторить. Если это ему удастся, то он победил на первом этапе. В следующий раз, имея опыт, он уже должен будет все сделать самостоятельно.

Итак, на практике показать, чему равен синус тридцати градусов. Как решается эта задачка?

Точно так же как и любая другая: надо смело делать то, что умеешь делать и не делать то, что не умеешь делать! Главное, здесь, – смело начинать действовать без раздумий.

Итак, вычислим значение синуса 30°.

Мы знаем, что для любого острого угла в прямоугольном треугольнике



Следовательно,



Теперь, начертим прямоугольный треугольник и расставим все обозначения и введем параметры – буквы обозначающие величины. Ведь именно связи между величинами мы ищем. Это мы умеем делать.

Пусть дины катетов будут соответственно равны *a* и *b.* Длина гипотенузы – *с*. Кроме теоремы Пифагора и формулы синуса угла, здесь не видно иных связей между величинами. Этого пока недостаточно. Как увеличить количество связей?

Достроим треугольник до прямоугольника и проведем в нем вторую диагональ.

D В

##### a

##### b

##### c

О

А ) 30° С



Точку пересечения диагоналей обозначим буквой О. Теперь у нас гораздо больше связей между величинами.

Если один острый угол в прямоугольном треугольнике равен 30°, то другой должен быть равен 60° (т.к. их сумма должна равняться 90°).

D В

##### 60°

##### 60°

##### 

##### b

##### c

##### 60°



О

А 30° С



Диагонали прямоугольника равны друг другу и при пересечении делятся пополам. Значит, отрезок ОВ равен отрезку ОС. Следовательно, треугольник ОВС с основанием ВС – равнобедренный. А у равнобедренного треугольника углы при основании равны. Следовательно, угол ОСВ равен углу ОВС и равен 60°.

Но если два угла у треугольника по 60°, то и третий угол должен быть равен 60°, чтобы сумма всех углов была 180°.

Если все три угла у треугольника равны друг другу, то и все три его стороны тоже равны друг другу. Значит, ВС = СО = ОВ.

Но, ВС = *а*, а ОВ =  .

Следовательно, *а =* .

Подставим это значение в формулу синуса угла.



Итак, sin30°=.

Следовательно, если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то напротив этого катета будет угол в 30°. И наоборот.

Еще раз пройдите с ребенком всю процедуру вывода. Потом, дайте ему чистый лист, и пусть попробует повторить. Если с первого раза не получится, пусть взглянет на предыдущие записи. Добейтесь, чтобы он смог сделать весь вывод сам.

При этом напомните, что мы просто делали только то, что умеем делать, и не делали то, что не умеем делать. Поэтому любые отговорки, что он этого не умеет делать, не принимаются.

Теперь, пусть сам попробует вычислить значения синуса 60°.

Ясно, что достроить прямоугольный треугольник до прямоугольника он догадается. Но дальше он зайдет в тупик. У него получится, что половине гипотенузы равен не катет *а*, а катет *b*.

В самом деле, применяя тот же подход, что в предыдущей задаче получаем, что теперь равносторонним является треугольник АОВ. Следовательно, длина катета *b* равна половине длины гипотенузы.

Но нам нужен катет *а*, а не катет *b.*

Что делать?

Как только прозвучали фразы длина гипотенузы и длина катета, сразу пишем теорему Пифагора для данного треугольника.

А она поможет?

Не знаем. Но мы умеем это делать, поэтому смело делаем. Ничего другого не остается.

##### a

##### *b*=

##### c



##### A

##### 60°

##### 60°

##### C

##### B

##### C

##### O

##### 60°

##### 30°



По теореме Пифагора:

*a*2 + *b2* = *c*2

Подставим *b* = , получим

*a*2 + = *c*2 => *a*2 + = *c*2 =>

*a*2 = *c*2 –  => *a*2 =  *c*2 =>

*a*=  => *а* = .

Подставим полученное значение *a* в формулу для синуса угла в 60°.

sin60° = 

Итак, мы получили значения синусов двух стандартных углов:

sin30° =  и sin60° = 

Теперь, пусть попробует вычислить значение синуса угла в 45°.

Подскажите только, что в данном случае треугольник достраивать до прямоугольника не нужно.

Те же самые выкладки, в качестве закрепления пройденного материала, можно предложить сделать и для косинусов углов соответственно в 30, 45 и 60 градусов.

Получится таблица:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| α | 30° | 45° | 60° |
| sin α |  |  |  |
| cos α |  |  |

# Как вычислить синусы 0 и 90 градусов?

Интересно, а чему равен синус нуля?

Здесь, конечно, мы лукавим: ребенку это совершенно не интересно. А мы попробуем его заинтересовать. Предложите ему начертить прямоугольный треугольник с острым углом в 0°, с тем, чтобы выяснить, чему равен sin 0°.

Первая же попытка приведет ребенка к выводу, что такой треугольник не существует.

А вы предложите следующий ход рассуждений: если в прямоугольном треугольнике уменьшать острый угол до нуля, то противолежащий ему катет тоже уменьшится до нуля.

В

В

А С

Получится необычный прямоугольный треугольник:

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

А

В

С

Если ребенок заявит, что это – просто отрезок прямой, то скажите, что он удовлетворяет всем признакам треугольника. Здесь угол АСВ прямой. Угол АВС – тоже, а угол ВАС равен нулю. Сумма всех углов равна 180°. Как и положено для треугольника.

Длина катета АС равна длине гипотенузы АВ, а длина катета ВС равна нулю.

Синус угла ВАС равен отношению длины противолежащего ему катета (ВС) длине гипотенузы (АВ). Т.к. при угле ВАС равном нулю, длина катета ВС тоже равна нулю, то и синус этого угла тоже равен нулю. Вот такая геометрия.

Осталось выяснить, чему равен синус угла в 90°.

При неизменном катете ВС будем увеличивать острый угол в прямоугольном треугольнике до 90°. Как только это случится, углы при основании станут равны друг другу.

В

B

С

А

А

C

А

Получился еще один странный прямоугольный треугольник.

Тем не менее, это прямоугольный треугольник, причем равнобедренный, т.е. противолежащий нашему углу катет станет равен гипотенузе. Их отношение равно 1. Следовательно, синус угла в 90° равен 1.

Теперь пусть ребенок попробует сам вычислить значения косинусов 0° и 90°. Порядок рассуждений ему известен.

Здесь очень важно обратить внимание на то, что рассматривается динамичный процесс и при этом получается статичный результат. Напомните ему, что тот же подход применялся на уроке, посвященном вычислению площади круга: количество сторон вписанного правильного многоугольника стремился к бесконечности (динамичный процесс) и в пределе получалось, что его площадь равна площади круга (статичный результат).

Достроим таблицу значений синусов и косинусов углов:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
| sin α | 0 |  |  |  | 1 |
| cos α | 1 |  |  | 0 |

Пусть ребенок проанализирует таблицу значений. Он уже достаточно опытен, чтобы заметить некоторую симметричность и сделать выводы.

Теперь воспользуемся его же собственными наблюдениями для определения связи между синусами и косинусами углов в прямоугольном треугольнике.

В самом деле, в прямоугольном треугольнике синус одного острого угла всегда равен косинусу другого острого угла и наоборот. Это следует из определений синуса и косинуса угла. Пусть этот вывод ребенок попробует сделать сам.

У него должно получиться следующее:

«Синус угла есть отношение противолежащего ему катета к гипотенузе, а косинус угла – отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Так как в прямоугольном треугольнике

 и ,

то sin α = cos β ».

##### a

##### b

##### c

β

α

β

А

С

В

Если у ребенка получится этот вывод, похвалите его и сообщите, что на основе этого вывода можно вывести замечательную формулу.

Вспомним, что в прямоугольном треугольнике сумма его острых углов равна прямому углу.

∠α + ∠β = 90°

Следовательно,

∠β = 90° – ∠α.

Теперь запишем полученную выше формулу (sin α = cos β) и заменим в ней ∠β на то, чему он равен, т.е. на (90° – ∠α).

Получим

sin α = cos (90° – α).

Аналогично,

cos α = sin (90° – α).

Выразим углы в радианной мере.

Мы знаем, что 90° = *рад*.

Следовательно,

sin α = cos (– α).

Аналогично,

cos α = sin (– α).

# Связь между синусом и косинусом данного угла

Мы рассмотрели связи между величинами катетов и величиной гипотенузы для данных углов. Аналогично можно вывести связи между отношениями величинами катетов и соответствующими острыми углами. Так появятся *тангенсы* и *котангенсы*  углов.

В прямоугольном треугольнике величина противолежащего катета, приходящаяся на единицу прилежащего ему катета, называется тангенсом (tg α) этого угла. А величина прилежащего катета, приходящаяся на единицу противолежащего катета, называется котангенсом угла (ctg α).

##### a

##### b

##### c

β

α

β

А

С

В



Следовательно,

tg α =  и ctg α = . Значит, *tg* *α* = .

Теперь можно решать задачки.

Пусть ребенок попробует выразить тангенс угла через его синус и косинус?

Опять напомните, что все знания, необходимые для решения этой задачки, у него есть. Сумеет ли он ими воспользоваться?

Если нет, то напомните, что просто надо делать то, что можешь делать:

1. Можешь записать формулу для тангенса угла?

(tg α = )

2. Можешь записать формулу для синуса угла?

()

3. Можешь вычислить катет *b*?

(*a* = *c*·sin α)

4. Можешь записать формулу для косинуса угла?

()

5. Можешь вычислить катет *b*?

(*b* = *c*· cos α)

6. Можешь подставить параметры *а* и *b* в формулу для тангенса угла.

(tg α =  = = )

Итак, отношение синуса данного угла к его косинусу дает тангенс данного угла.

А как мы догадались, что нужно было делать именно это?

Никак. Мы ничего другого здесь не умели. Мы просто делали то, что умели делать.

Скорее всего, на каком-то этапе ребенок сам догадается, как закончить решение. Даже если не догадается, по завершении вывода ему будет ясно, что решение было довольно простым. Он даже может заявить, что догадался бы сам. Вот тут вы ему дайте следующую задачку. Пусть покажет свои способности.

А задачка, вот какая: выявите связь между синусом угла в прямоугольном треугольнике и косинусом этого угла.

Для большинства учеников подобные условия задачи все еще не вполне понятны. Поэтому сформулируем вопрос иначе: какая связь между элементами, из которых состоят синус и косинус угла? Т.е., какая связь между катетами и гипотенузой? Он должен вспомнить про теорему Пифагора. Пусть запишет ее параметрами.

###### *a*2+*b*2=*c*2

Как теперь обратить все это в синусы и косинусы? Надо катеты разделить на гипотенузу. Пусть его не смущают квадраты катетов. Разделим левую и правую части этой формулы на квадрат гипотенузы. Получим.

 + = .

sin2α + cos2α = 1

Как красиво!

Таким образом, синус угла можно выразить через его косинус следующим образом:

###### sin2α =1 – cos2α.

Следовательно,

###### sinα =.

И наоборот:

###### cos2α =1 –sin2α.

Следовательно,

###### cosα =

Теперь дайте нашему ученику задачу.

Чему равен синус угла, если его косинус   
равен ?

Скорее всего, он начнет думать. В этом случае скажите, что думать нельзя. Как только задумался, снижаем на бал оценку. Обычно, когда ребенок не может решить задачу, ему предлагают подумать. Но, думать надо, когда изучаем теорию. При решении задач думать уже поздно.

Сразу пишем sinα = , подставляем значение косинуса и вычисляем:



Когда есть теория, надо смело действовать.

# Теорема косинусов

Для некоторых детей это самые непонятные и потому самые страшные слова. Но мы уже научились рассеивать страхи. Пусть ребенок попробует сам разобраться с этими теоремами. Вы только помогите поставить проблему. К тому же он уже не ребенок, он уже вполне настоящий ученик!

Пусть дан произвольный треугольник.

Две стороны (*a* и *b*) и угол (*α*) между ними удалось измерить.

Спросите еще раз: чем можно измерить длины сторон и чем можно измерить угол ?

Третью сторону (*с*), допустим, измерить не удается… Можно ли вычислить ее длину?

Ясно, что если бы угол между сторонами *a* и *b* был равен 90°, то получился бы прямоугольный треугольник, и по теореме Пифагора длина стороны *с* была бы вычислена.

Но, здесь все углы острые. Треугольник не прямоугольный. Что делать?

Как всегда, будем делать то, что можем делать, и не будем делать то, что не можем.

Начертим треугольник.

Проведем высоту (*h*) и расставим параметры. Это мы умеем делать.

Получили два прямоугольных треугольника.   
(Рис. 87).

*а*

*с*

*b*

*h*

*e*

*d*

β

*α*



Нам нужно вычислить длину стороны *с*. В правом треугольнике:

###### *c2 = h2 + e2* (по теореме Пифагора).

Но нам не известны длины *e* и *h*.

Вычислить *h* нам поможет левый треугольник. Он тоже прямоугольный. Величины углов в этом треугольнике нам известны. Значит, нам известны величины их синусов и косинусов. Следовательно,

###### *h* = *a* sinα

Итак, длину высоты мы вычислили. Но нам еще нужно вычислить длину отрезка *е*. Спросите, как вычислить длину отрезка *е*, если известны длины отрезков *d* и *b*?

Конечно, *е* = *b – d* .

Величину катета *d* вычислим с помощью косинуса известного угла в левом треугольнике. Здесь,

###### *d* = *a* cosα

Следовательно,

###### *е* = *b* *– d*= *b* – *a* cosα

Теперь подставим значение параметров *h* и *e* в нашу первую формулу (*c2 = h2 + e2*).

###### *c*2 = *a*2 sin2α + (*b* – *a* cosα) 2

Раскрываем скобки (квадрат разности)

###### *c*2 = *a*2 sin2α + *b*2 – 2*ab* cosα + *a*2 cos2 α

Выносим за скобки общий множитель (*a2*) у первого и последнего слагаемых в правой части уравнения.

###### *c*2 = *a*2 (sin2α + cos2α) + *b*2 – 2*ab* cosα

Зная, что sin*2*α *+* cos*2*α = 1, получаем

###### *c*2 = *a*2 + *b*2 – 2*ba* cos α

Мы получили теорему косинусов.

Она гласит: *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без их удвоенного произведения, умноженного на косинус угла между ними.*

Теперь спросите, как изменится полученная формула, если угол α будет равен 90°, т.е. для прямоугольного треугольника?

Он обязательно должен додуматься!

Конечно, получится теорем Пифагора. Следовательно, теорему косинусов можно назвать расширенной теоремой Пифагора.

Итак, длина стороны любого треугольника равна

###### 

Таким образом, **можно вычислить длину одной стороны треугольника, если известны длины двух других его сторон и угол между ними**.

Мы опять получили формулу, которая позволяет вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко.

Задача.

*В* ΔАВС *длина сторона* АС *равна* 7 *см, а стороны ВС –* 4 *см. Угол*  ВАС *равен* 45°*. Вычислите длину стороны* АВ*.*

A

В

С

Если ученик опять задумался, напомните, что думать нельзя. Надо действовать!

Обозначим параметрами длины сторон и величины углов.

Напомни, что обычно, величины сторон обозначают буквами соответствующими обозначениям противоположных вершин. Пусть АВ=*c*, ВС=*a*, АС=*b*.

А величины углов, обозначают греческими буквами соответствующими обозначениям вершин. Пусть ∠ АВС= β; ∠ВАС=α; ∠АСВ =γ

Пишем формулу теоремы косинусов:

###### *c*2 = *a*2 + *b*2 – 2*ba* cos α

Подставляем значения параметров:

###### *c*2 = 42 + 62 – 2·4·6·cos 60º

###### *c*2=28;

###### .

Длина стороны АВ равна *см.*

# Теорема синусов

Если известны два угла и длина одной из сторон треугольника, можно ли вычислить длины оставшихся двух его сторон? Ответить на этот вопрос нам поможет теорема синусов.

Построим треугольник.

*а*

*с*

*b*

γ

β

*α*

Пусть нам известны длина основания *с* и прилежащие к ней углы α и *β.*

Ясно, что третий угол может быть легко вычислен. Сумма углов в треугольнике равна 180º. Следовательно, γ = 180º – (α+*β).*

Как вычислить длины сторон *a* и *b*.

Проведем высоту.

Выразим высоту через синусы соответствующих углов.

*h = a* sin*β*

*h = b* sinα

*а*

*с*

*b*

γ

β

*α*

*h*

Так как левые части формул равны, то можем приравнять правые их части:

###### *a* sin*β = b* sinα

Разделив левую и правую части на (sin*β*·sinα), получим:

###### 

Добейтесь того, чтобы ученик спросил: а почему мы разделили левую и правую части уравнения на (sinβ·sinα)?

Пока мы делали то, что понятно и успешно связали длины двух сторон и величины двух противолежащих им углов. А остальные? Что с ними делать?

Вначале ничего не приходит на ум. Но приходить ничего и недолжно. Надо просто делать то, что умеем. Т.е. продолжаем делать то же самое, только для другой пары сторон и углов.

Если ничего не помогает, спросите, можно ли провести высоту в данном треугольнике по-другому?

Конечно можно!

Давайте, проведем.

*а*

*с*

*b*

γ

β

*α*

*h1*

Выразим высоту h1 через синусы соответствующих углов *β* и γ.

###### *h1 = b* sinγ

###### *h1 = с* sinβ

Так как левые части формул равны, то можем приравнять правые их части:

###### *b* sinγ = *с* sin*β*

Разделив левую и правую части на (sinγ·sinβ), получим:

###### 

Но, выше мы получили другое равенство отношений. Напомним его:

###### 

Следовательно,

###### 

Это и есть теорема синусов. Она гласит: *отношения длин сторон и синусов противолежащих им углов треугольника пропорциональны.*

Следовательно, **если нам удалось измерить одну сторону треугольника и два его угла, то длины двух других сторон можно вычислить.**

Задача.

*В* ΔАВС *длина стороны* АС *равна* 7 *см. Угол* АВС *равен* 30°*, а угол* ВАС *равен* 45°*. Вычислите длину стороны* ВС*.*

A

В

С

Если наш ученик опять задумался, напомните, что думать нельзя. Надо действовать!

В самом деле, каждый раз нам нужно только перевести задачку с русского языка на язык математики. Для этого надо просто ввести параметры и записать связи между ними (формулы) согласно условию задачи. Далее математика должна все сделать сама. Т.е. мы сами задачу не решаем (не думаем), а пользуемся инструментом (математикой), который за нас проделывает всю работу. Ребенок же каждый раз пытается думать, т.е. пытается решить задачу самостоятельно, без инструмента, а уже потом записать решение с помощью языка математики. Все задом наперед.

Итак, не думаем, а действуем. Обозначим параметрами длины сторон и величины углов.

Напомним еще раз, что обычно, величины сторон обозначают маленькими буквами, соответствующими обозначениям противоположных вершин. Пусть АВ=*c*, ВС=*a*, АС=*b*.

Величины углов, обозначают греческими буквами. Пусть ∠ АВС= β; ∠ВАС=α; ∠АСВ =γ

Пишем формулу теоремы синусов:



Нам нужно только первое равенство. Подставляем в нее значения параметров:





Чтобы избавиться от знаменателя в левой части, умножим обе части уравнения на 1/2 и получим



Длина стороны ВС равна *см.*

Через три точки, не лежащие одной прямой, можно провести окружность. Следовательно, около любого треугольника можно описать окружность. Это позволяет расширить теорему синусов.

# Связь между центральным и вписанным углами

У нас уже достаточно опыта и мы можем попробовать доказать еще несколько теорем.

Пусть ребенок построит окружность и начертит в ней радиус, диаметр и хорду, как показано на рисунке ниже.

γ

β

β

α

Сумма углов в треугольнике равна 180° и сумма смежных улов равна тоже 180°. Пусть ребенок напишет формулы, связывающие соответствующие параметры. Должна получиться система из двух уравнений.

2β + γ = 180° – для треугольника

α + γ = 180° – для смежных углов

Теперь можно избавиться от угла γ и вывести связь между α и β. Пусть ребенок вычтет нижнее уравнение из верхнего. Получим:

2β – α = 0.

Следовательно,

2β = α

Теперь напомним, что углы, образованные двумя радиусами, называются центральными. В нашем случае угол α — центральный.

А как называются углы, образованные двумя хордами? В нашем случае это угол между хордой и диаметром (диаметр — тоже хорда).

Углы, образованные двумя хордами, называются *вписанными*. У нас угол β — вписанный.

Мы только что доказали теорему: *вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Чтобы выяснить все ли понятно ребенку, спросите, чему будет вписанный угол, опирающийся на диаметр.

α

β

Диаметр состоит из двух радиусов, которые в свою очередь, составляют центральный угол, равный 180°. Вписанный угол β должен быть вдвое меньше. Следовательно, он прямой! Сколько бы вписанных углов, опирающихся на диаметр, мы ни построили, они все будут прямыми.

Отсюда следует, т.к. все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, будут равны половине центрального угла, то они будут равны между собой.

Теперь можем вернуться к теореме синусов.

Опишем около треугольника ABC окружность и построим диаметр CD, как показано на рисунке ниже. Соединим хордой AD конец диаметра с одной из вершин треугольника.

А

β

*d*

γ

D

В

С

*a*

α

*c*

*b*

Углы ADC и ABC — вписанные и опираются на общую дугу АС. Следовательно, они равны по величине. Значит, их синусы тоже равны. Но угол ADC опирается на диаметр, т.е. он — прямой. Следовательно, синус угла ADC равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, т.е.

sin ∠ADC = *b*/*d* => sin β = *b*/*d* => 

Следовательно, можем расширить теорему синусов:



# Теорема о угле между касательной и хордой, проведенной к точке касания

Построим окружность. Проведем касательную (Рис. 96). Пусть ребенок опишет эту прямую, т.е. пусть даст определение термину касательная.

r



Добейтесь получения именно определения: кратчайшего описания.

Должно получиться следующее.

*Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.*

Теперь проведем к точке касания радиус.

Что можно сказать об угле между радиусом и касательной?

Так как у касательной с окружностью только одна общая точка, то радиус, проведенный к точке касания, образует с касательной два равных смежных угла. Следовательно, эти углы прямые.

Теперь построим хорду, исходящую из точки касания. Хорда тоже образует с касательной два смежных угла. Рассмотрим острый угол α (Рис. 97).

α

γ

β

γ



Здесь можно задать ребенку вопросы, на которые он уже знает ответы. Ответы на них должны помочь ему самостоятельно вывести теорему о касательной и хорде.

— Почему треугольник равнобедренный?

— Чему равна сумма углов в треугольнике?

— Каков угол между касательной и радиусом?

— Чему равна сумма углов α и γ?

— Как связаны углы α и β?

В самом деле, так как α+ γ = 90° и 2γ + β =180°, то α=2 β

Таким образом, *угол между касательной и хордой, проведенной из точки касания, равен половине центрального угла, опирающегося на эту хорду*.

# Вывод формул приведения

А что делать, если угол больше 90°? Например, чему равен синус 150°?

А разве может быть синус угла, который больше 90°? Ведь, в этом случае исчезает прямоугольный треугольник. А определение синуса и косинуса угла мы давали исходя из того, что треугольник прямоугольный. Что делать?

Надо получить новое определение синуса и косинуса угла.

Здесь нам на помощь придет система координат.

Начертим окружность с центром в начале координат и радиусом равным единице. Между радиусом и осью ОХ угол *α*.

У

1

##### –1

–1

##### уА

##### хА

##### α

##### r

##### 1

##### 1

##### –1

##### А

##### Y

##### X

Опустим перпендикуляры из точки А на ось ОХ и ось ОУ. Получились два прямоугольных треугольника. Катет, противолежащий углу *α*,равен ординате *у*А, т.е. координате *у*А. А прилежащий ему катет есть координата *x*А.

Синус угла *α* равен отношению противолежащего катета к гипотенузе или отношению координаты *у* точки А к величине радиуса (*r*), т.е.

sin*α* = .

Соответственно, косинус угла *α* равен отношению координаты *x* точки А к радиусу (*r*), т.е.

cos*α* = .

В тригонометрическом круге длина радиуса равна 1, т.е. *r* = 1.

Следовательно,

sin*α* = *y*;

cos*α* = *x.*

Эти выводы универсальны и подходят для вычисления синусов и косинусов любых углов.

Теперь, повернем радиус *r* против часовой стрелки еще на 90 градусов.

Получим тупой угол, равный (α+90°).

При повороте единичного радиуса на угол (α+90°), новые координаты его конца будут соответственно *х*B и *у*В.

##### B

##### α

##### О

##### π

2

##### А

##### r

##### хB

##### α

##### 1

##### хА

##### –1

–1

##### Y

##### 1

##### уB

##### уА

##### r

##### X

##### –1

И что дальше?

Дальше, опять делаем только то, что можем делать. Будем сравнивать полученные прямоугольные треугольники. Ничего другого не остается. Напомните, мы это делаем, не потому что мы заранее знали, что именно это надо делать. Мы просто должны получить хоть какой-то результат, чтобы решить, как быть дальше. Иначе, все будет стоять.

Прямоугольных треугольников здесь четыре и у всех равные гипотенузы и углы. Следовательно, они равны. Длины катетов этих прямоугольных треугольников представляют собой модули соответствующих координат. А координаты связаны между собой.

Очевидно, что

*х*А = *у*В.

*у*А = – *х*В (т.к. координата *х*В отрицательна);

Спросите, почему во втором равенстве появился минус?

Потому что координата *х*В отрицательна.

Ученик скажет, что это понятно.

Проверьте. Пусть объяснит. Ведь на чертеже перед координатой *х*В нет минуса.

Напомните, *х*В – параметр, обозначающий величину координаты. Эта величина, здесь, отрицательна. Например, *х*В =–0,7 (см). А величина координаты *у*А – положительна. Например, *у*А = 0,7 (см). Если приравняем эти координаты ясно, что 0,7≠–0,7. Поэтому перед одним из параметров надо поставить знак минус, чтобы равенство выполнялось.

Дальше, запишем все возможные тригонометрические формулы для угла *α*.

*у*А = sin*α*;– *х*В = sin*α*;

*х*А = cos*α*; *у*В = cos*α*.

Т.к. мы сказали, что косинусу угла между единичным радиусом и осью ОХ равен координате *x* его конца, то будем считать, что

cos (*α*+90º) = *х*В

Напомним, что это только для единичного радиуса.

Соответственно,

Осталось сделать замену:

cos (*α*+90º) = *х*В = – *у*А = –sin*α*

sin (*α*+90º) = *y*В  = *у*В = cos*α*

Окончательно получили:

cos (*α*+90º) = –sin*α*

sin (*α*+90º) = cos*α*

Запишем полученные формулы, заменив градусную меру радианной.

sin(+ α) = cosα ;

cos(+ α) = – sinα .

Это – так называемые, формулы приведения.

Имеется в виду, приведение тригонометрических функций углов, которые больше 90 градусов, к функциям углов, которые меньше 90 градусов.

Мы получили нужные формулы!

А как мы догадались, что уже получили нужные формулы?

В левой части формул синус и косинус угла, который больше 90º, а в правой – синус и косинус угла, который меньше 90º.

Как же их применять?

Просто!

Например, вычислим, чему равен синус 150º?

Угол в 150 градусов можно представить как сумму углов в 90° и 60°. Следовательно,

sin 150° = sin (90°+60°) = cos 60° = 0,5.

Запишем это в радианной мере угла

sin = sin (+) = cos  = 0,5.

Обратим еще раз внимание на то, что координаты конца радиуса могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, значения синусов и косинусов тоже могут быть как положительными, так и отрицательными. Ведь длина радиуса всегда положительна.

Итак, в отношениях  и  знаменатель всегда положителен. А числитель меняет знак в соответствии с величиной угла *α*.

Для запоминания знака окружность делят на четыре четверти, обозначая их римскими цифрами от положительного значения оси ОХ против часовой стрелки.

Первая четверть (I): углы от 0° до 90°.

Здесь, координаты *х* и *у* точек дуги окружности положительны. Следовательно, синусы и косинусы углов между радиусами, проведенными к этим точкам и осью ОХ здесь положительны.

Вторая четверть (II) – от 90° до 180°.

Здесь, координаты *y* положительны, а координаты *x* отрицательны. Следовательно, значения синусов углов в интервале от 90° до 180° положительны, а значения косинусов – отрицательны.

##### **–**1 О 1 Х

##### У

##### 1

##### **–**1

##### I

##### II

##### III

##### IV

Третья четверть (III) – от 180° до 270°.

Здесь, координаты *y* и координаты *x* отрицательны. Следовательно, значения синусов и косинусов углов в интервале от 180° до 270° отрицательны.

Четвертая четверть (VI) – от 270° до 360°.

Здесь, координаты *y* отрицательны, а координаты *x* положительны. Следовательно, значения синусов углов в интервале от 270° до 360° отрицательны, а значения косинусов – положительны.

А что делать, если угол больше 180°?

Например, чему равен синус угла в 210°?

Во-первых, отметим, что этот угол попадает в третью четверть. Следовательно, и синус, и косинус этого угла будут отрицательны.

Угол в 210° можно записать в виде суммы (90°+90°+30°).

Следовательно,

sin 210°= sin (90°+90°+30°).

Применим формулу приведения

sin (90°+(90°+30°) = cos (90°+30°)=

= –sin 30°= –1/2.

Слишком громоздко! Докажем, что

sin (180°+α)= – sin α

cos (180°+α)= – cos α

У

1

##### –1

–1

##### уА

##### хА

##### α

##### r

##### 1

##### 1

##### –1

##### А

##### Y

##### X

##### В

##### уВ

##### О

Повернем радиус ОА на 180°. Новый радиус ОВ образует с осью ОХ угол (α+180°). Синус этого угла равен проекции ОуВ. Проекция отрицательна и по модулю равна проекции ОуА, которая в свою очередь равна синусу угла α. Следовательно,

sin (°+α)= – sinα

cos (+α)= – cos α.

Для углов, которые больше 360°, просто отнимаем период, например,

sin (360°+α) = sinα

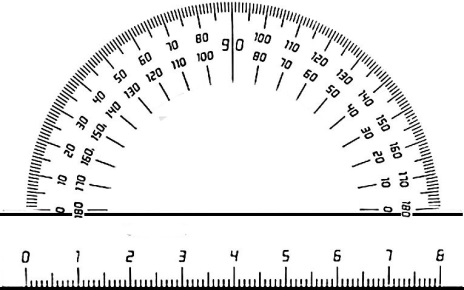
cos (360°+α)= cos α

Рассмотрим это подробнее и выясним, что такое период?

# Измерение углов больших 360 градусов

Постройте угол и предложите его измерить. Имея под рукой транспортир, это нетрудно сделать. А удастся ли правильно озвучить или записать результат этого измерения? Вопрос вначале покажется немного странным. Но, тем не менее, ученик смело ответит.

– Конечно, удастся. Вот приложили транспортир и угол измерен. Он равен тридцати градусам.

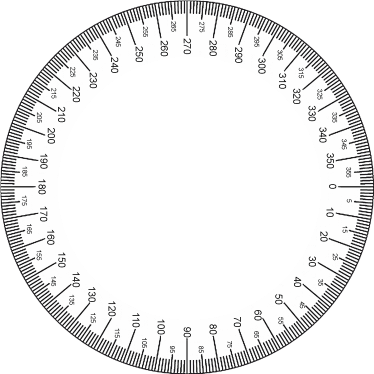


– Да, но это только острый угол.

– Ой, да, есть еще тупой угол. Он равен 150°.

– Разве? Убери транспортир. Видишь? Тупого угла, равного 150°, на чертеже нет.

Заменим транспортир.



– В самом деле! Здесь угол в 30° и угол в… 330°.

– Верно. И все? Больше углов нет?

– Кажется, нет!

– В том то и дело, что кажется. Посмотри внимательнее. Их там очень много.

Дети вначале приучаются различать только острые углы. Потом они начинают видеть и углы тупые, т.е, углы больше 90°, но меньше 180°. Только что заметили, что есть углы больше 180°. Теперь надо показать, что есть углы больше 360° и меньше 0°.

Рассмотрим циферблат часов.

Мы знаем, что сутки начинаются в 0 часов. В этот момент обе стрелки, и минутная, и часовая, показывают 12.

На сколько градусов повернется минутная стрелка в течение часа?

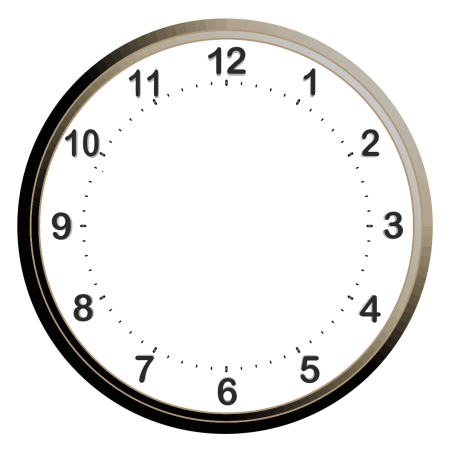
Ровно на 360 градусов, т.е. она сделает один полный виток. Количество градусов в одном витке называется периодом.

А за 2 часа? Ясно, что два раза по 360 градусов. Итого, на 720 градусов. Это уже два полных витка (периода).

А если пройдут 3 часа? Тогда, на 1080 градусов. Это три периода.

Когда минутная стрелка делает один оборот, часовая стрелка поворачивается на одну двенадцатую долю окружности, т.е. показывает, что прошел ровно 1 час. Следовательно, если часовая стрелка указывает на 7 часов, то минутная совершила семь оборотов, т.е. повернулась на 7×360° = 2520 градусов.

Удалим часовую стрелку. Оставим только минутную. На сколько градусов она сейчас повернута от нуля?



Этого нельзя сказать точно. Потому что, это может быть и 0°, и 360°, и 2520°, и … любой другой угол кратный 360°. Множество значений этого угла есть 360°·*n*, где *n* – целые числа.

В радианной мере этот угол равен 2*n*, где  *n* – целое число.

Рассмотрим еще раз тригонометрический круг.

Построим радиус. Пусть угол между радиусом и осью ОХ будет *α.*  Чему может равняться этот угол, если измерение его транспортиром показало 30°?

У

1

–1

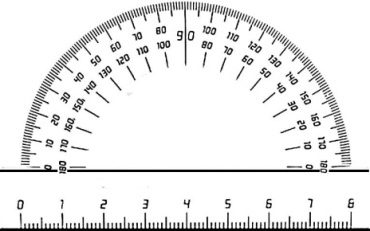
##### Y

##### Х

##### α

##### r

##### О



Ясно, что ∠*α =*30°*.*

Точно так же верно, что ∠*α =* 390°,   
(т.е. 30° + 360°). А может оказаться, что ∠*α =*750° и т.д. Все множество возможных значений этого угла можно записать так:

∠*α =*30° + 360°·n, где *n* – целые числа.

Здесь, 360°– период. А *n* – количество периодов.

В радианной мере результат будет такой:

∠*α =*+ 2*n*, где *n* – целые числа.

В радианной мере, период равен 2 *рад*. (т.е. 6,28 *рад*.). Причем, это если радиус поворачивался против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении.

А чему будет равен угол между радиусом и осью ОХ, если радиус поворачивался по часовой стрелке?

# Отрицательные углы

У

1

–1

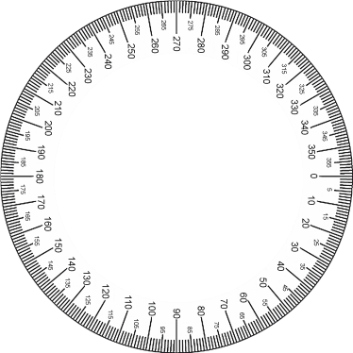
##### Y

##### х

##### α

##### r

##### β



Угол, отмеренный в противоположном направлении (по часовой стрелке), будет отмечаться знаком минус, т.е. он будет отрицательным.

В нашем случае, обозначим величину угла параметром *β.*

Ясно, что ∠*β* = –330°. Но, точно так же, верно, что ∠*β* = –690°, (т.е. –330°+(–360)), и т.д.

Все множество возможных значений угла можно записать так:

∠*β = –*330° – 360°·*n*, где *n* – целые числа.

Выразим угол *β* через угол *α*:

∠*β* = *α* –360°·*n*

А можно ли записать все возможные значения углов одной строчкой?

Конечно, можно.

Пусть *α* – параметр обозначающий величину угла между осью ОХ и радиусом, измеренную транспортиром. Тогда все возможные значения углов можно записать так:

*α* + 2*n*, где *n* – все целые числа.

Но у нас точно такое же выражение было и для положительных углов.

Совершенно верно. Но в предыдущем случае мы говорили, что *n* – целые числа. Под целыми числами ученик обычно понимает только положительные числа. Теперь, отметим, что  *n* – все целые числа, имея в виду, положительные, отрицательные и ноль.

Для обозначения всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) используют параметр Z.

Следовательно, окончательная запись всех возможных значений угла между радиусом и осью ОХ на данном рисунке, будет:

*α* + 2*n*, (*n*∈Z).

Напомним еще раз. На тригонометрическом круге положительные углы отмеряют против часовой стрелки: 0, , π, , 2π, , 2π, …

Отрицательные углы отмеряют по часовой стрелке: 0, –, –π, –, –2π, –, –2π, …

# Периоды синуса и косинуса угла

Рассмотрим еще раз тригонометрический круг.

##### У

##### 1

##### x

##### y

##### r

##### α

–1О 1 Х

##### –1

Здесь, угол между радиусом *r* и осью ОХ равен

*α* + 2*n*, (*n*∈Z).

Мы знаем, что синус этого угла для любых значений *n*∈Z, равен координате “*y”* конца радиуса, а косинус –  координате “*x”.*

Следовательно,

sin (*α* + 2*n*) = sin *α;*

cos (*α* + 2*n*) = sin *α*

Это видно на чертеже.

Так как 2*n* – четное число для любого *n*∈Z, то можем сказать, что данное равенство справедливо для любого четного количества .

Например,

sin (*α* + 8) = sin *α;*

cos (*α* + 8) = sin *α*

А для нечетного?

Так как (2*n*+1) – нечетное число для любого *n*∈Z, то

sin (*α* + (2*n*+1)) = – sin *α*

cos (*α* + (2*n*+1)) = – cos *α*

Покажем это на тригонометрическом круге.

##### У

##### 1

##### y

##### r

##### α1

##### α

##### x1

##### r

##### x

*–*1 1 Х

##### y1

##### –1

Здесь, α1= α+.

Или, для всех значений углов между данными радиусами и осью ОХ, можно записать:

α1= (α+2*n*)+ = (α+ (2*n+*1)).

Значит,

sin α1= sin (α+ (2*n+*1)).

Но, на чертеже видно, что синус угла α1 равен координате *y*1. А координата *y*1, в свою очередь, равна координате *y* с противоположным знаком. А координата *y* равна синусу угла α. Следовательно,

sin α1= sin (α+ (2*n+*1)) = *y*1 = –*y* = –sin α.

Или, для нечетного количества 

sin (α+ (2*n+*1)) = –sin α.

Точно так же и для косинуса угла α1.

cos (α+ (2*n+*1)) = –cos α.

Например,

sin (α+5) = – sin α;

cos (α+5) = – cos α.

В самом деле, угол (*α* + 2*n*) расположен в I-ой четверти, а угол α+ (2*n+*1) – в III-ей. А мы знаем, что в первой четверти значения синусов и косинусов углов положительны, а в третьей – отрицательны.

# Как решать тригонометрические уравнения?

Можно ли вычислить величину угла, если известно значение синуса этого угла?

Скорее всего, можно.

Пусть sin*α =* .

Чему будет равен угол *α*?

Ясно, что ∠*α* =30°.

Возможны ли еще значения?

Мы уже знаем, что да. Надо добавить витки, т.е. периоды. Следовательно, для нашего случая

∠*α* =30° + 2*n*, (*n*∈Z)

Кажется, все верно. Но давайте проверим результат с помощью тригонометрического круга. Значение синуса угла наклона единичного радиуса к оси ОХ на тригонометрическом круге, равно координате Y конца этого радиуса. В нашем случае, эта координата равна одной второй.

##### Y

##### 1

##### 1

##### –1

*–*1 О 1 Х



##### 30°

Но, координату Y, равную одной второй, имеет еще один радиус. Этот радиус образует с осью ОХ тупой угол.

##### Y

##### 1

*–*1 О 1 Х

##### 1



##### –1

Что делать?

Надо записать и второй корень уравнения.

А как его записать?

Рассмотрим оба угла на одном чертеже. Здесь пунктирная линия, проходящая через значение синуса угла и параллельная оси ОХ, называется линией синуса.

##### Y

##### 1

##### 1

##### С

##### 1

##### А 1

##### 30°

О

1

*–*1

½

##### В

##### 1

##### 150°

##### Х

##### 1

##### –1

Угол между радиусами равен 120°. Очевидно, что угол между осью ОХ и радиусом ОА будут равен 120° + 30° = 150°. Или 180° – 30° = 150°.

Следовательно, угол, синус которого равен одной второй, есть угол и в 150°. Это второй корень уравнения.

Итак, все решения нашего уравнения можно записать в виде:

∠*α* =30° + 2*n* и ∠*α* =150° + 2*n*.

А как записать решение в общем виде?

Пусть, sin *α*  = t. Корнями этого уравнения являются следующие углы:

*α*  = arcsin t + 2*n*

и

*α*  = ( – arcsin t) + 2*n*

**Арксинусом** (arcsin) числа (t) называется угол, синус которого равен этому числу (t).

А нельзя ли записать решение данного уравнения в одну строчку?

Конечно, можно.

*α*  = (–1)n arcsin t + *n*, (*n*∈Z).

Что это значит?

Давайте применим эту формулу для нашего частного случая.

sin*α =* .

*α*  = (–1)n arcsin+ *n*, (*n*∈Z).

или

*α*  = (–1)n  + *n*, (*n*∈Z).

Если *n*=0, тогда *α*  = (–1)0  + ·0 =;

или в градусах *α*  = (–1)0 30°+ 180°·0 = 30°.

Если *n*=1, тогда *α*  = (–1)1  + ·1 = –+ = ;

или *α*  = (–1)1 30°+ 180°·1 = –30°+180°= 150°.

Если *n*=2, тогда *α*  = (–1)2 +·2 =+ ·2= ;

или *α*  = (–1)2 30°+ 180°·2 = 30°+360°= 390°,

и т.д.

Теперь, пусть наш ученик сам попробует проделать те же операции для отрицательных значений переменной *n*.

А как вычислить величину угла, если известно значение косинуса угла?

Пусть,

cos *α* = 

Мы знаем, что косинус 60° равен одной второй. Следовательно, первый корень у нас уже есть.

*α*  = 60°+ 2*n*, (*n*∈Z).

Чтобы вычислить второй корень, рассмотрим тригонометрический круг.

Косинус угла равен координате *х* единичного радиуса. Т.к. косинус нашего угла равен одной второй, то проведем линию косинуса через координату *х* = 

##### Y

##### 1

##### 1

*–*1 О 1 Х

##### 60°

½

##### –60°

##### –1

На чертеже видно, что значение  имеют косинусы двух углов: 60° и –60°.

Следовательно, второй корень:

*α*  = – 60°+ 2*n*, (*n*∈Z).

Запишем решение уравнения одной строкой:

*α*  = ± 60°+ 2*n*, (*n*∈Z).

В общем виде, решение уравнения cos *α* = t, будет:

*α*  = ± arccos t + 2*n*, (*n*∈Z).

**Арккосинусом** (arccos) числа (t) называется угол, косинус которого равен этому числу (t).

# Решение тригонометрических уравнений в заданном интервале углов

Допустим, к решению тригонометрических уравнений предъявляются дополнительные условия. Например, пусть требуется выделить из решения только углы, расположенные в заданном интервале.

Например, требуется решить уравнение

sin β = 

Дополнительно, из всего множества решений, нужно выделить углы, расположенные в интервале   
[]

Запишем решение уравнения.

β1 = arcsin 0,5 + 2π*n* =  + 2π*n,* (*n*∈Z)

β2 = π–arcsin 0,5 + 2π*n* =  + 2π*n,* (*n*∈Z)

Построим тригонометрический круг.

Проведем линию синуса через ординату равную . Проведем радиусы к точкам пересечения линии синуса и окружности. Синусы углов между ними и осью ОХ будут равны .

Выделим пунктиром интервал [], от меньшего угла к большему против часовой стрелки.



##### Y

##### 1

О

½



##### β2

##### β1

##### π

##### Х

##### 1



В этот интервал не попадает угол  и все углы равные +2πn. А угол  – попадает. Причем, только он один.

Следовательно, решение уравнения – множество углов

β1 =  + 2π*n,* β2 = + 2π*n,* (*n*∈Z)

или одной строкой

β=(–1)*n* +π*n*, (*n*∈Z)

А в заданный интервал, из этого множества значений углов, попадает только один угол: β= .

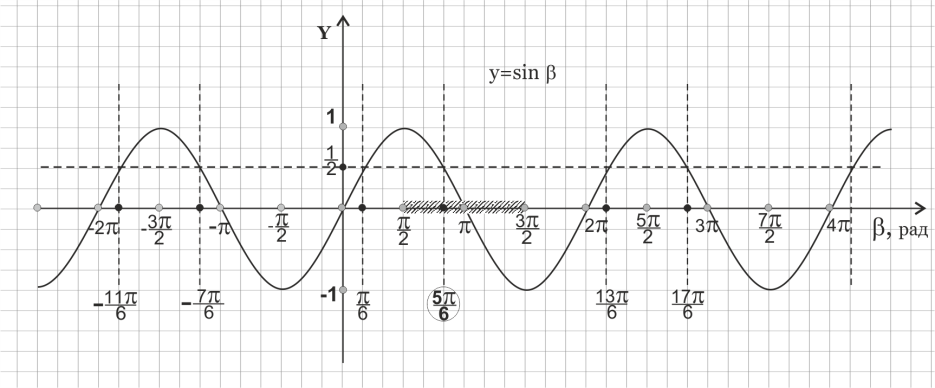
Покажем то же решение на графике.

Построим график функции *y* = sin β

Отложим по оси ОХ значения углов, выраженные в радианах, а по оси ОУ – значения синусов этих углов.

Так как в нашем уравнении у= sinβ = 0,5, проведем прямую (пунктиром), параллельную оси ОХ, через ординату равную .

Решениями нашего уравнения являются координаты проекций точек пересечения этой прямой и графика у= sinβ. В нашем случае, такое решение только одно β= , т.к. только этот угол попадает в заданный интервал [].





Решим еще одно уравнение

cos γ = – .

Запишем решение уравнения.

γ = ±arccos + 2π*n* = ±  + 2π*n,* (*n*∈Z)

Допустим, что из всего множества этих решений, требуется выделить углы, расположенные в интервале [].

Построим тригонометрический круг.



##### Y



##### γ1

##### π

##### –2π

##### –π

##### 2π



##### γ2

##### Х

##### 1



### 



Проведем линию косинуса через абсциссу, равную. Проведем радиусы к точкам пересечения линии косинуса и окружности. Косинусы углов между ними и осью ОХ будут равны.

Выделим на окружности пунктиром интервал   
[], от меньшего угла к большему против часовой стрелки.

В этот интервал попадает только угол γ1 =.

Покажем то же решение на графике.

Построим график функции y = cos γ.

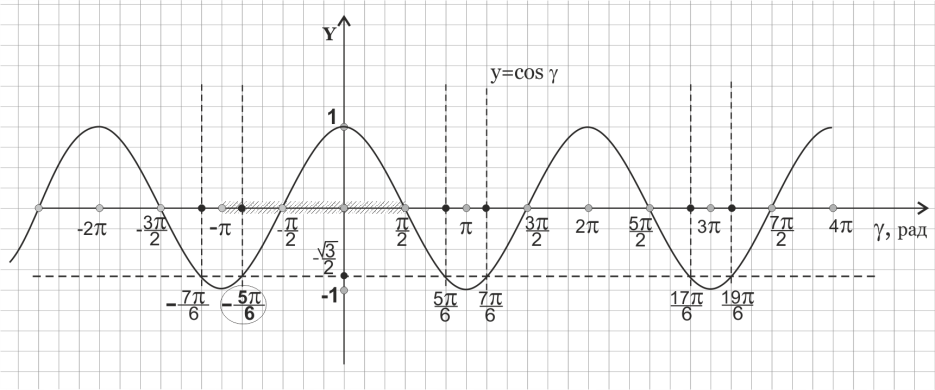
Отложим по оси ОХ значения углов, выраженные в радианах, а по оси ОУ – значения косинусов этих углов.

Так как в нашем уравнении у= cos γ = – , проведем прямую (пунктиром), параллельную оси ОY, через абсциссу, равную .

Решениями нашего уравнения являются координаты проекций точек пересечения этой прямой и графика у= cos γ.

Это углы γ = ±  + 2π*n,* (*n*∈Z)

В заданный интервал [] попадает только один угол γ=.





# Что такое производная функции

Формулы и функции становятся все сложнее, а требования к точности измерений и вычислений, все выше. В какой-то момент, известный нам математический инструментарий может оказаться слишком грубым, и нам потребует инструмент более точный и более мощный.

Рассмотрим движение автомобиля. Его координаты меняются с течением времени. Изменение координаты в единицу времени, называется скоростью изменения координаты. Это мы знаем.

При прямолинейном равномерном движении изменение координаты равно перемещению. Это тоже мы знаем. А чему равна скорость автомобиля в точке с координатой *x* или в момент времени *t*?

Изменение координаты в точке равно нулю. Следовательно, скорость в данной точке тоже равна нулю. И в соседней точке тоже. Во всех точках скорость равна нулю. Это следует из формулы *v*=Δ*x*/Δ*t*. Следовательно, в каждой точке перемещение равно нулю (s=Δ*x* =0). Как же автомобиль движется? И как вычислить скорость в данной точке. Выходит, старый метод – деление перемещения на время – для вычисления скорости здесь не подходит.

Математики нашли выход. Примерно такой же, как и в случае с выводом формулы для площади круга (рис. 38).

Мы знаем, что величина перемещения есть функция времени, т.е. S = *f*(t). Следовательно, скорость в данной точке есть отношение перемещения к промежутку времени, который стремится к нулю. Только в этом случае получается скорость в данной точке, т.к. при этом перемещение становится бесконечно малым, т.е. обращается в точку.

Параметрически это запишется так:



Читается это так: скорость (*v*) в данной точке с координатой *x*0 равна пределу отношения изменения перемещения к бесконечно малому промежутку времени. Это, так называемое, предельное отношение или **производная.**

Вычисление производной – математическое действие. Обозначается оно штрихом справа вверху функции. Например, *y'*=*f'*(*x*) означает, что нужно взять производную от функции *y*=*f*(*x*).

Как же ее берут?

Рассмотрим общий случай. Пусть дана функция *y*=*f*(*x*). Ее производная будет:

*y'*=*f '* (*xо*)= 

*Производной функции в точке хо называется предел отношения изменения функции к изменению аргумента, когда последнее стремится к нулю.*

Как ее вычисляют?

Мы знаем, что Δ*f*(*x*)= *f*(*x*) – *f*(*x*0) и Δ*x*=*x*–*x*0.

Т.к. *x*=*x*0+Δ*x,* то можем записать

*f*(*x*) – *f*(*x*0)= *f*(*x*0+Δ*x*) – *f*(*x*0).

Сделаем замену в формуле для производной.



И что с этим делать? Например, как вычислить производную функции *f*(*x*)=*x*2?

Подставим в формулу для вычисления производной функции значение самой функции.



Мы вычислили производную функции *f*(*x*)=*x*2 в точке *x*0. Она равна 2*x*0. Точно так же можно вычислить производную функции *f*(*x*)=*x*3. Она будет равна 3*x*2.

В общем виде:

###### (*x*n)' =n*x*n-1

Для примера, вычислим величину скорости тела через 3 секунды после того, как его подбросили вертикально вверх с начальной скоростью равной 40 *м/с*?

Из курса физики формула для вычисления координаты равноускорено движущегося тела выглядит так:

###### *x =x*0*+v*0*t+at*2*/*2.

Здесь, координата *x* – функция, а время *t* – аргумент. Вычислим производную этой функции, подставим в нее наши данные и получим скорость тела в момент времени *t*.

###### *v = x' = (x*0*+v*0*t+at*2*/*2*)'= v0 + at.*

У нас *v*0=40 *м/с*; *a=* –9,8 *м/с*2 (ускорение свободного падения)*; t=*3 *с.*

Следовательно,

###### *v* = 40 *м/с –* 9,8 *м/с*2·3 *с* = 10,6 *м/с*.

А можно ли вычислить величину производной как-нибудь иначе? Можно. Геометрически.

Рассмотрим геометрическое представление производной. На рис. 117 изображен график функции *y*=*f*(*x*). К графику в точке А проведена касательная.

Пусть производная этой функции в точке с координатой *x*0 равна

###### *y*'=*f* '(*x*0).

Абсциссе *x*0 соответствует ордината *y*0.

Возьмем на оси ОХ точку с координатой *x* так, чтобы *x >x*0. Абсциссе *x* соответствует ордината *y*.

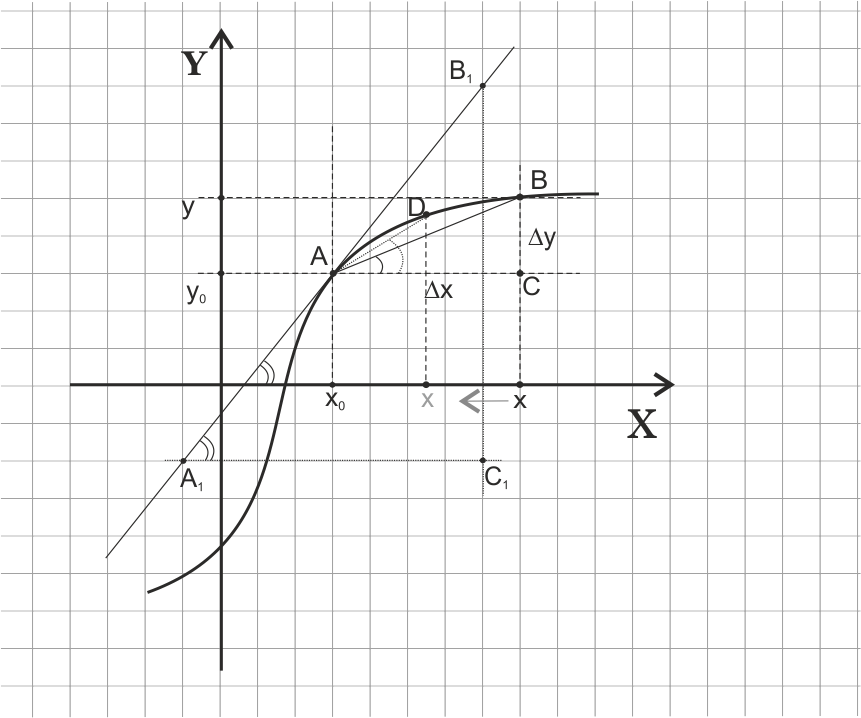
Здесь,

###### Δ*х*= *х* – *х*0

###### Δ*y*= *y* – *y*0

Производная функции *y*'=*f* '(*x*0) по определению равна:

###### *y*'=*f* '(*x*0) =





Пока все понятно. Не понятно только, для чего здесь касательная. Не будем спешить. Продолжим.

Соединим отрезком точки А(*x*0; *y*0) и В(*x*; *y*). В прямоугольном треугольнике АВС

 = tg (∠ВАС)

При Δ*х* → 0 имеем ∠ВАС→∠В1А1С1

Почему?

Например, если Δ*х* уменьшить вдвое, т.е. переместить точку *x*влево на половину длины отрезка до *x*0, то получим угол DAC. Он очевидно больше, чем угол ВАС. При дальнейшем уменьшении Δ*х,* угол будет продолжать расти и в пределе, при Δ*х* → 0, стремится к углу В1АС. Следовательно,

 = tg (∠В1АС)

Это и есть производная функции в точке *x*0.

Сравним угол В1АС и угол наклона касательной в точке *x*0 к оси ОХ. Они равны.

Следовательно, *производная функции в точке x0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в точке* *x*0.

Тангенс угла наклона касательной легко вычислить по графику. Надо подобрать прямоугольный треугольник с гипотенузой, лежащей на касательной так, чтобы его вершины имели целочисленные координаты. На нашем чертеже, таких треугольников два. Это ΔА1В1С1 и ΔАВ1С.

tg (∠В1АС)= tg (∠В1А1С1) =  = 1,25.

Для каждого из этих треугольников, угол между гипотенузой и основанием треугольника равен углу наклона касательной.

Следовательно, производная нашей функции в точке *x*0 тоже равна 1,25.

Итак,

###### *y*'=*f* '(*x*0) = = tg α

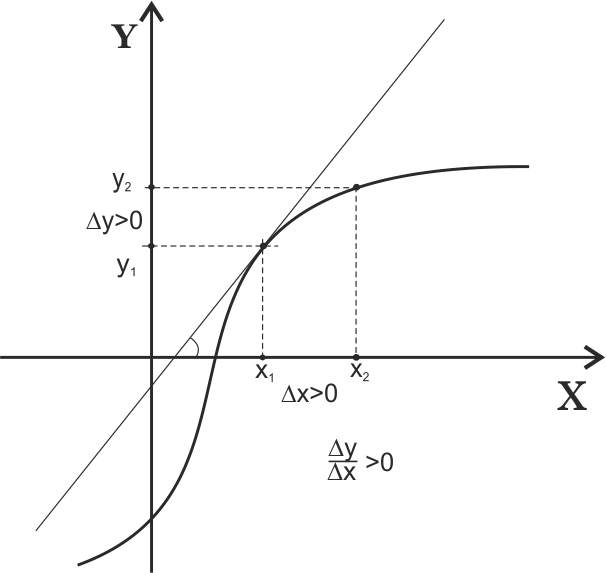
# Анализ функции с помощью вычисления ее производной

Если есть график функции, то провести ее анализ не представляет труда. А если графика нет?

В самом деле, может так случиться, что построить график функции достаточно сложно, но некоторые ее свойства необходимо быстро вычислить. Здесь нам поможет производная функции.

Например, как вычислить интервалы возрастания и убывания функции. Рассмотрим, как ведет себя производная функции на этих интервалах.

**1.** Пусть функция возрастает на некотором интервале (рис. 118). Возьмем на оси ОХ любые две точки *x*1 и *x*2 этого интервала такие, что *x*2 > *x*1





Здесь, *x*2 – *x*1 =Δ*x* > 0 и *y*2 – *y*1 =Δ*y* > 0.

Следовательно,

*y*'=*f* '(*x*0) =  > 0.

Т.е. производная возрастающей функции всегда положительна.

Угол наклона касательной к любой точке графика этой функции на данном интервале острый, т.е. находится в интервал от 0º до 90º. Тангенс этого угла тоже положителен.

Значит, если производная функции на некотором интервале положительна, то на этом интервале функция возрастает.

И что с этим делать?

Это правило позволяет вычислить интервалы возрастания функции, не строя ее график. Вначале надо вычислить производную функции. Потом вычислить интервалы значений аргументов, для которых эта производная будет больше нуля, т.е. решить неравенство

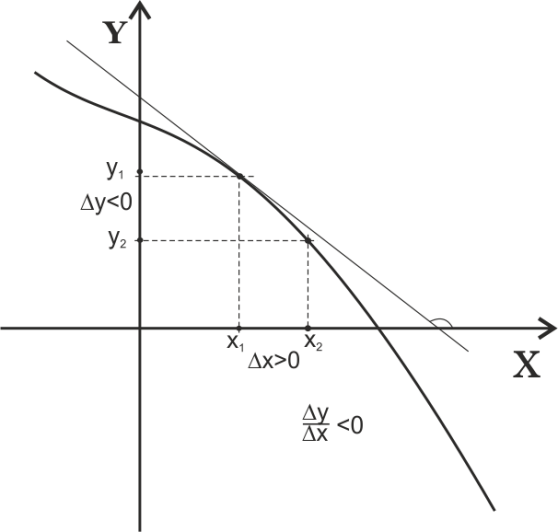
*y*'=*f* '(*x*0) =  > 0.

**2.** Пусть функция убывает на некотором интервале (рис. 119). Возьмем на оси ОХ любые две точки *x*1 и *x*2 этого интервала такие, что *x*2 > *x*1.

Здесь, *x*2 – *x*1 = Δ*x* > 0, но *y*2 – *y*1= Δ*y* < 0

Следовательно,

*y*'=*f* '(*x*0) =  < 0.





Производная убывающей функции всегда отрицательна.

Угол наклона касательной к любой точке графика этой функции на данном интервале тупой, т.е. находится в интервал от 90º до 180º. Тангенс этого угла тоже отрицателен.

Следовательно, если производная функции на некотором интервале отрицательна, то на этом интервале функция убывает.

Чтобы вычислить интервалы убывания функции, не строя ее график, надо вычислить производную функции. Потом вычислить интервалы значений аргументов, для которых эта производная будет меньше нуля, т.е. решит неравенство

*y*'=*f* '(*x*0) =  < 0.

**3.** А какова производная в точках, где возрастание функции сменяется на убывание и наоборот. Значения функции в этих точках называют **максимумами** или **минимумами** функции. Общее название –**экстремумы функции**. А сами точки называют **точками максимума** и **точками минимума** или **точками экстремума.**

Касательные к графику функции в точках ее экстремумов параллельны оси OX, т.е. углы их наклона к оси ОХ равны нулю. Следовательно, тангенсы углов наклона тоже равны нулю.

Пусть функция *у*=*f*(*x*) непрерывна в окрестности точки*x*0. Если при переходе значений аргумента через эту точку функция меняет знак, то это – точка экстремума. Если в этой точке есть производная, то она рана нулю.

Если функция не меняет знак, то производной в этой точке нет

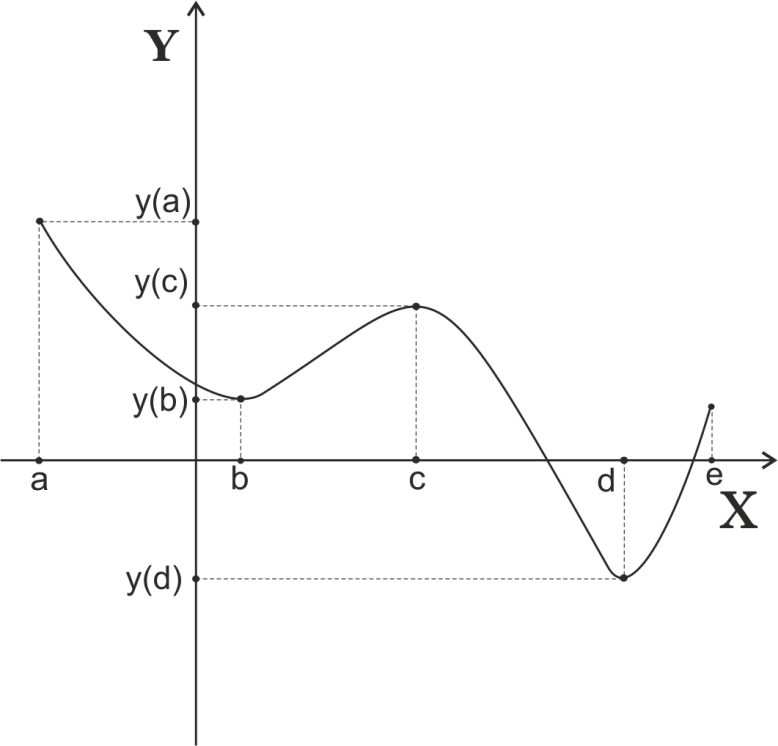
Если знак функции меняется с плюса на минус, то это точка локального максимума.

Если знак функция меняется с минуса на плюс, то это точка локального минимума.

Чтобы вычислить *минимум функции* надо вычислить *точку минимума* и подставить ее значение в уравнение функции. Вычисленное значение функции в точке минимума и будет *минимумом функции*.

Чтобы вычислить *максимум функции* надо вычислить *точку максимума* и подставить ее значение в уравнение функции. Вычисленное значение функции в точке максимума и будет *максимумом функции*.

Итак, надо различать *максимум функции*, *точку максимума* и *максимальное значение функции*.





На рис. 120 изображен график некоторой функции заданной в интервале [*a*; *e*].

Здесь,

абсцисса *b* – точка минимума функции;

ордината *у*(*b*) – минимум функции;

абсцисса *с* – точка максимума функции;

ордината *у*(*с*) – максимум функции;

абсцисса *d* – точка минимума функции;

ордината *у*(*d*) – минимум функции, причем,   
она же – минимальное значение функции;

ордината *у*(*a*) – максимальное значение функции.

Чтобы вычислить точку минимума надо вычислить производную функции, приравнять ее нулю и решить уравнение

*y*'=*f* '(*x*0) =  = 0.

Теперь можно определить знаки производной в интервалах между точками экстремумов (точек минимумов и точек максимумов). Если знак меняется с плюса на минус, значит это точка максимума. Если с минуса на плюс – точка минимума.

Например.

Вычислите точки минимума и минимум функции

*y* = (*x*–2)2(*x*+5)–1

1. Вычислим производную этой функции.

*y*' = [(*x*+3)2(*x*+5)–1]' = [(*x*2+6*x*+9)(*x*+5)–1]' =

= [(*x*3+5*x*2+6*x*2+30*x* +9*x*+45– 1]' =

= (*x*3+11*x*2+39*x–*44)' = 3*x*2+22*x*+39.

Приравняем производную нулю и вычислим корни получившегося уравнения.

3*x*2+22*x*+39=0

*х*1=–3; *x*2= 

Следовательно:

3*x*2+22*x*+39=3(*x*+3)(*x*+)

Вычислим интервалы, где производная положительна, т.е. решим неравенство:

3(*x*+3)(*x*+)>0

–

+

+

 –3

В точке *x*= –3 производная функции меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в это точка минимума функции.

Вычислим минимум функции. Т.е. вычислим значение функции при *x*= –3

*y* = (*x*–2)2(*x*+5)–1=(3–2)2(3+5)–1=7.

Мы вычислили точку минимума и минимум функции.

Наш ученик может спросить, а для чего это надо?

Здесь можно привести пример из физики.

Задача. *Стрела выпущена вертикально вверх с начальной скоростью* 49 *м/с. Какова максимальная высота полета стрелы? Через сколько секунд она окажется на этой высоте?*

С помощью производной задача решается быстрее, чем обычным способом.

Высота, на которой окажется стрела, зависит от времени, т.е. *h*=*f*(*t*). Эта функция задается формулой

,

где *v*0 – начальная скорость (здесь, *v*0=49 *м*/*с*) ; *a* – ускорение (здесь, *a* =–9,8 *м*/*с*2).

Вычислим производную этой функции.



Подставим численные значения и приравняем ее нулю.

49 – 9,8·*t* = 0

*t* = 5 (*c*)

Следовательно, наивысшей точки стрела достигнет через 5 секунд. Чтобы вычислить эту высоту, подставим вычисленное время в формулу для высоты:

 (*м*).

# Приложение. Базовый уровень ЕГЭ.

Мы не готовились специально к ЕГЭ. Но, тем не менее, пройденных уроков достаточно, чтобы выполнить задания базового уровня ЕГЭ по математике.

Демонстрационный вариант взят на сайте:

http://ege.edu.ru/main/demovers/

В скобках, ссылки на номера страниц данной книги, где рассматриваются соответствующие темы.

**1.** Найдите значение выражения

###### 

Ответ:

*или*

Найдите значение выражения

###### 

Ответ:

*или*

Найдите значение выражения

###### 

Ответ:

**2.** Найдите значение выражения

###### 

Ответ:

*или*

###### 

Ответ:

**3.** Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в РФ составляет 13% от начисленной заработной платы. Сколько рублей получает работник после уплаты НДФЛ, если начисленная заработная плата составляет 20000 рублей?

Ответ:

*или*

ЕГЭ по физике сдавали 25 выпускников школы, что составляет треть от общего количества выпускников. Сколько выпускников этой школы не сдавали экзамен по физике?

Ответ:

**4.** Найдите *m* из равенства F = *mа*, если F = 84 и   
*а* = 12.

Ответ:

*или*

Найдите *v*0 из равенства *v = v0 + at*, если *v* = 20,   
*t* = 2 и *a* = 1.

Ответ:

*или*

Найдите S, если S = *v0t* + и *v*0= 6,   
*t* = 2, *a* =–2.

Ответ:

**5.** Найдите cos *α*, если sin *α* = 0,8 и 90°<*α*<180°.

Ответ:

*или*

Найдите sin 390°.

Ответ:

6. Баночка йогурта стоит 4 рубля 60 копеек. Какое наибольшее количество баночек йогурта можно купить на 25 рублей?

Ответ:

*или*

Килограмм моркови стоит 40 рублей. Олег купил 2 килограмма моркови. Сколько рублей сдачи он должен получить со 100 рублей?

Ответ:

*или*

Для ремонта квартиры требуется 63 рулона обоев. Какое минимальное количество пачек обойного клея нужно купить для ремонта квартиры, если 1 пачка клея рассчитана на 6 рулонов?

Ответ:

7. Найдите корень уравнения 

Ответ:

*или*

Найдите корень уравнения 

Ответ:

*или*

Найдите отрицательный корень уравнения

*х2 – х – 6 =* 0 .

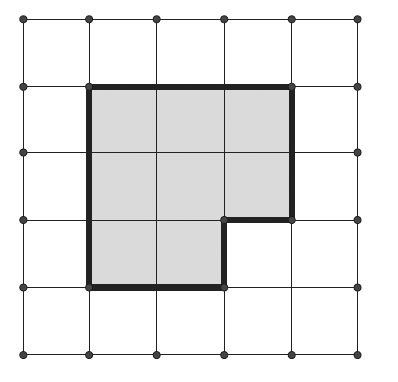
Ответ:

**8.** Участок земли для строительства санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 900 м и 400 м. Одна из больших сторон участка идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно отгородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

Ответ:

*или*

В квартире две прямоугольные комнаты. Размеры первой комнаты — 6*м*×3*м*, а размеры второй комнаты — 5*м*×4*м*. Какая из этих комнат больше по площади? В ответ запишите площадь этой комнаты в квадратных метрах.

Ответ:\_\_\_\_\_\_\_

*или*

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 10*м*×10*м*. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в *м*2.

Ответ:\_\_\_\_\_\_

**9.** Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

|  |  |
| --- | --- |
| ВЕЛИЧИНЫ | ВОЗМОЖНЫЕ  ЗНАЧЕНИЯ |
| A) рост ребёнка | 1) 32 *км* |
| Б) толщина листа бумаги | 2) 30 *м* |
| B) длина автобусного маршрута | 3) 0,2 *мм* |
| Г) высота жилого дома | 4) 110 *см* |

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г |
|  |  |  |  |

*или*

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ ВОЗМОЖНЫЕ

ЗНАЧЕНИЯ

A) вес взрослого человека 1) 8 т

Б) вес грузового автомобиля 2) 5 *г*

B) вес книжки 3) 65 *кг*

Г) вес пуговицы на одежде 4) 300 *г*

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г |
|  |  |  |  |

**10.** В чемпионате по прыжкам в воду участвуют 35 спортсменов: 7 из России, 12 из Китая, 9 из Японии и 7 из США. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется представителем России.

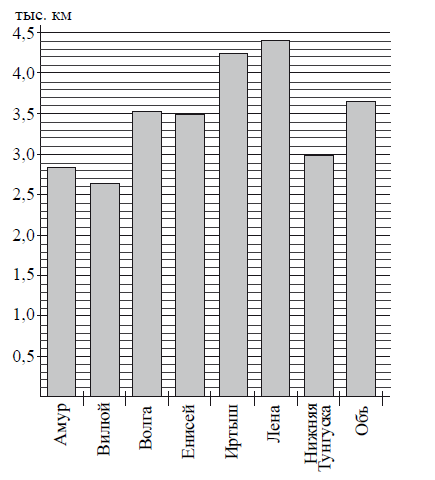
Ответ:

*или*

Из каждых 100 лампочек, поступающих в магазин, в среднем 3 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампочка, окажется исправной?

Ответ:

**11.** На диаграмме приведены данные о протяжённости восьми крупнейших рек России. Первое место по протяжённости занимает Лена. На каком месте по протяжённости находится Амур?



Ответ:

*или*

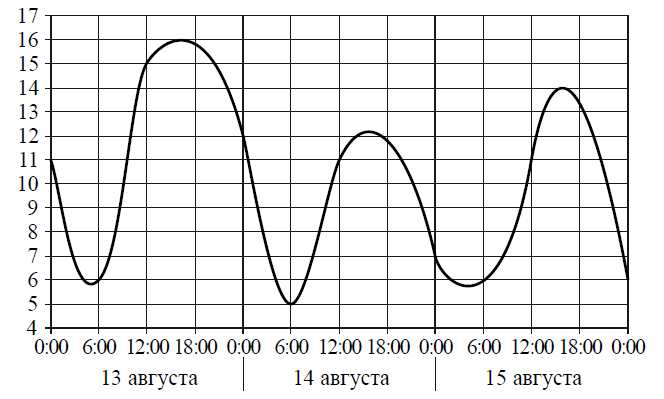
В таблице показано распределение медалей на Зимних Олимпийских играх в Сочи среди команд, занявших первые 10 мест по количеству золотых медалей. Сколько серебряных медалей у команды, занявшей второе место по числу золотых медалей?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Места | Команды | Медали | | | |
| Золотые | Серебряные | Бронзовые | Всего |
| 1 | Россия | 13 | 11 | 9 | 33 |
| 2 | Норвегия | 11 | 5 | 10 | 26 |
| 3 | Канада | 10 | 10 | 5 | 25 |
| 4 | США | 9 | 7 | 12 | 28 |
| 5 | Нидерланды | 8 | 7 | 9 | 24 |
| 6 | Германия | 8 | 6 | 5 | 19 |
| 7 | Швейцария | 6 | 3 | 2 | 11 |
| 8 | Республика Беларусь | 5 | 0 | 1 | 6 |
| 9 | Австрия | 4 | 8 | 5 | 17 |
| 10 | Франция | 4 | 4 | 7 | 15 |

Ответ:

*или*

На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



Ответ:

**12.** Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Переводчики | Языки | Стоимость услуг  (рублей в день) |
| 1 | Немецкий, испанский | 7000 |
| 2 | Английский, немецкий | 6000 |
| 3 | Английский | 3000 |
| 4 | Английский, французский | 6000 |
| 5 | Французский | 2000 |
| 6 | Испанский | 4000 |

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 12000 рублей в день.

В ответе для собранной группы укажите номера переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:

*или*

Турист подбирает себе экскурсии. Сведения об экскурсиях представлены в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Экскурсии | Посещаемые объекты | Стоимость  (рублей) |
| 1 | Крепость, загородный дворец | 350 |
| 2 | Музей живописи | 100 |
| 3 | Парк | 150 |
| 4 | Парк, музей живописи | 300 |
| 5 | Парк, крепость | 300 |
| 6 | Загородный дворец | 200 |

Пользуясь таблицей, подберите экскурсионный пакет так, чтобы турист посетил четыре объекта: крепость, загородный дворец, парк и музей живописи, а суммарная стоимость экскурсий не превышала бы 600 рублей.

В ответе для собранного комплекта укажите номера экскурсий без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:

*или*

Строительная фирма планирует купить 70 *м*3 пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

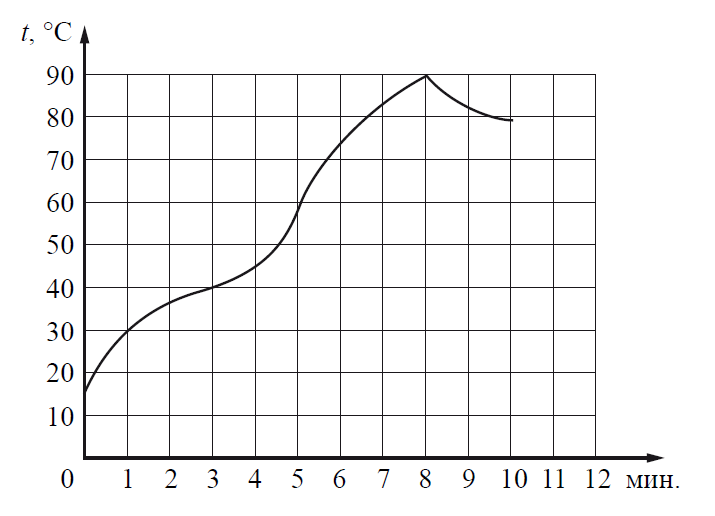
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Постав­щик | Стоимость  пеноблоков  (руб. за 1 *м*3) | Стоимость  доставки  (руб.) | Дополнительные  условия доставки |
| А | 2600 | 10 000 | Нет |
| Б | 2800 | 8000 | При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная |
| В | 2700 | 8000 | При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная |

Ответ:

**13.** В сосуд цилиндрической формы налили воду до уровня 80 *см*. Какого уровня достигнет вода, если её перелить в другой : цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в *см*.

Ответ:

**14.** На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

|  |  |
| --- | --- |
| ИНТЕРВАЛЫ  ВРЕМЕНИ | ХАРАКТЕРИСТИКИ  ПРОЦЕССА |
| A) 0 - 2 мин. | 1) температура росла медленнее всего |
| Б) 2-4 мин. | 2) температура падала |
| B) 4 - 6 мин. | 3) температура росла быстрее всего |
| Г) 8-10 мин. | 4) температура не превышала 40 °С |

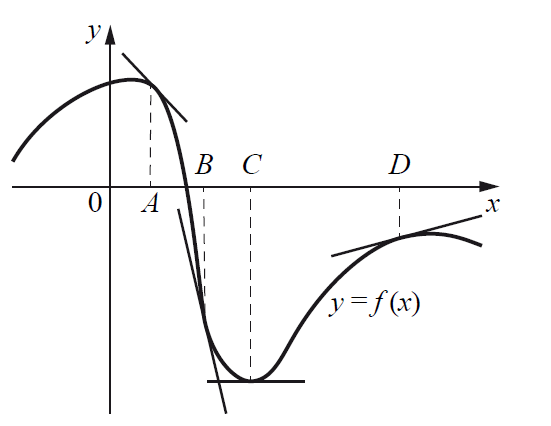
В таблице под каждой буквой, соответствующей интервалу времени, укажите номер характеристики процесса.

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г |
|  |  |  |  |

*или*

На рисунке изображён график функции у = f(х), к которому проведены касательные в четырёх точках.



Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.

ТОЧКИ ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

А 1) 0

В 2) –1

С 3) 0,3

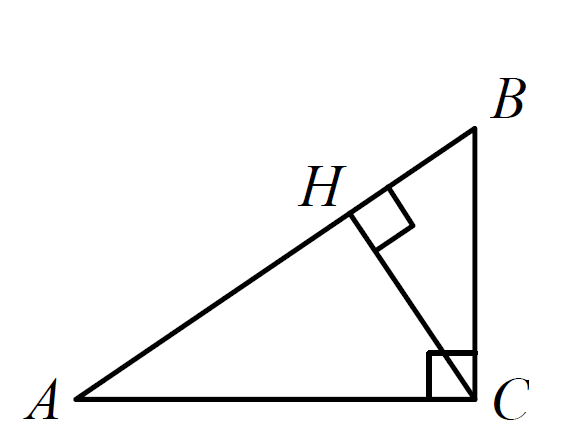
D 4) –5,5

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

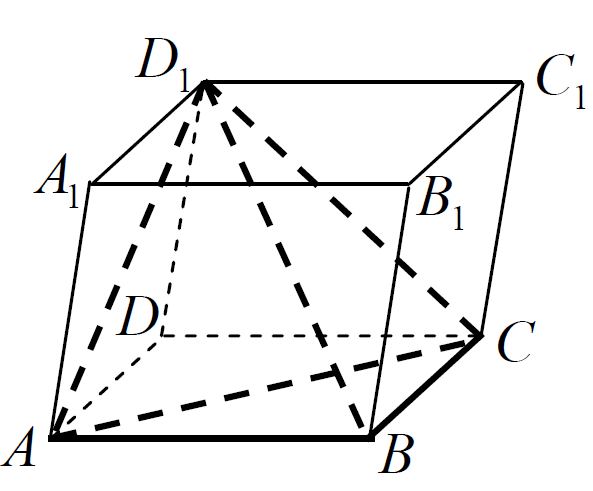
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | В | С | D |
|  |  |  |  |

**15.** В треугольнике ABC угол АСВ равен 90°,   
cos А = 0,8, АС = 4. Отрезок СН — высота треугольника (см. рис.). Найдите длину отрезка *АH*.



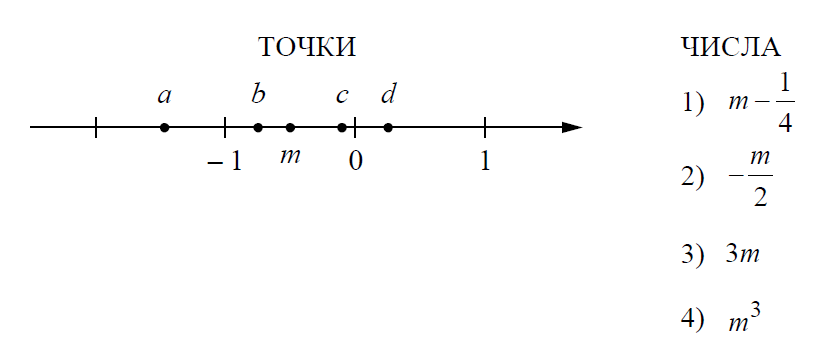
Ответ:

**16.** Объём параллелепипеда ABCDAlBlClDl равен 15. Найдите объём пирамиды D1ABC (см. рис.).



Ответ:

**17.** На координатной прямой точками отмечены числа *a, b, c, d* и *m*. Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца.



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

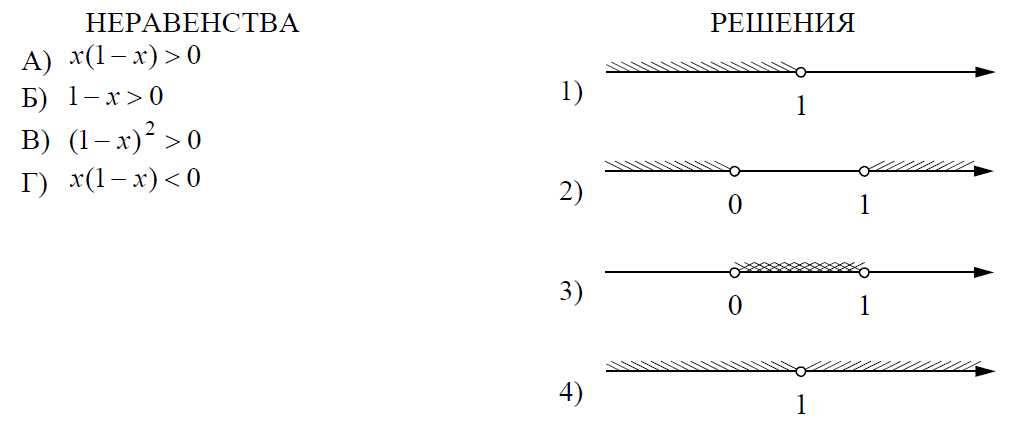
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *c* | *d* |
|  |  |  |  |

*или*

Каждому из четырёх неравенств слева соответствует одно из решений, изображённых на координатной прямой справа.

Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА РЕШЕНИЯ

A) *x*(1–*x*)>0

Б) 1–*x*=0

В) (1–*x*)2>0

Г) *x*(1–*x*)<0

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г |
|  |  |  |  |

**18.** В городе Z в 2013 году мальчиков родилось больше, чем девочек. Мальчиков чаще всего называли Андрей, а девочек – Мария. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

Среди рождённых в 2013 году в городе Z:

1) девочек с именем Мария больше, чем с именем Светлана.

2) мальчиков с именем Николай больше, чем с именем Аристарх.

3) хотя бы одного из родившихся мальчиков назвали Андреем.

4) мальчиков с именем Андрей больше, чем девочек с именем Мария.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:

*или*

Известно, что Витя выше Коли, Маша выше Ани, а Саша ниже и Коли, и Маши. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

1) Витя выше Саши.

2) Саша ниже Ани.

3) Коля и Маша одного роста.

4) Витя самый высокий из всех.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:

**19.** Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Ответ: (просто подберите числа )

**20.** Улитка за день залезает вверх по дереву на 3 *м*, а за ночь спускается на 2 *м*. Высота дерева 10 *м*. За сколько дней улитка поднимется на вершину дерева?

Ответ:

# Заключение

Мы рассмотрели только некоторые темы из курса школьной математики. Все уроки были проведены по следующему алгоритму:

1. Мы *наблюдали*

2. *Описывали* наблюдаемое

3. Строили *определение*

4. Присваивали *термин*

4. *Считали* – описывали количество единиц в группе, обозначая максимальное количество элементов в данной группе цифрами и числительными

6. *Измеряли* – описывали размер, сравнивая величины с эталонами.

7. *Вычисляли* с помощью связей между параметрами (*формулы*) то, что трудно или невозможно измерить.

8. *Ориентировались* на местности, описывая положение тела в пространстве с помощью *координат.*

Восемь шагов…

Первые восемь шагов к познанию. А знание – это переведенная в знаковую форму абстракция.

Еще раз заметим, что вышеприведенные уроки – это только помощь родителям в их разговорах с детьми о учебе в школе. По каждой теме необходимо прорешать десятки задач и сделать сотни упражнений для перевода знаний вначале в умения, потом в навыки. Это возможно только при систематической работе с профессиональным педагогом.

Доброй вам учебы и хороших учителей!

Содержание

1. Предисловие 3

2. Как задавать вопросы? 6

3. Что такое определение? 9

4. Что такое термины? 13

5. Как сказки помогают учить уроки? 20

6. Что такое счет? 22

7. Что такое сложение и умножение? 28

8. Что такое деление? 31

9. Что такое дроби? 35

10. Сложение дробей 39

11. Как складывать дроби с разными знаменателями? 46

12. Как умножать дроби? 52

13. Как делить дроби? 55

14. Что такое десятичные дроби? 57

15. А как перевести десятичную дробь в обыкновенную и наоборот? 59

16. Что такое проценты? 60

17. Как переводить текст задачи на язык математики? 61

18. Что такое формула? 63

19. Что такое задача? 68

20. Как решать уравнения? 71

21. Как решать задачи? 75

22. Что такое концентрация раствора? 83

23. Как измерять углы? 88

24. Что такое угол в 1 радиан? 97

25. Признаки равенства треугольников? 103

26. Виды углов 106

27. Как доказать теорему Фалеса? 108

28. Теорема о средней линии треугольника 112

29. Теорема о средней линии трапеции 115

30. Теорема о сумме величин углов любого треугольника 118

31. Что такое площадь? 120

32. Как вывести формулу площади треугольника? 124

33. Как вычислить площадь трапеции? 130

34. Как вычислить площадь правильного многоугольника? 134

35. Как вычислить площадь круга? 136

36. Как доказать теорему Пифагора? 139

37. Как применить теорему Пифагора? 143

38. Что такое квадратный корень? 148

39. Как решать квадратные уравнения? 150

40. Что такое дискриминант? 152

41. Что такое неравенство? 156

42. Как вычислить вероятность события? 162

43. Что такое объём? 164

44. Формулы объемов различных фигур 170

45. Что такое степень числа? 175

46. Сокращение дробей и формулы сокращенного умножения 181

47. Дробные показатели стемени 185

48. Что логарифм? 190

49. Уроки и загадки 196

50. Как описать положение тела в пространстве? 202

51. Что такое координата? 206

52. Что такое изменение величины? 214

53. Что такое функция? 218

54. Что значит исследовать функцию? 224

55. Решение неравенств методом интервалов 226

56. Что такое синус угла? 229

57. Как вычислить синусы 30, 45 и 60 градусов? 233

58. Как вычислить синусы 0 и 90 градусов? 239

59. Связь между синусом и косинусом данного угла 244

60. Теорема косинусов 248

61. Теорема синусов 252

62. Связь между центральным и вписанным углами 257

63. Теорема о угле между касательной и хордой, проведенной к точке касания 260

64. Вывод формул приведения 262

65. Измерение углов больших 360 градусов 270

66. Отрицательные углы 274

67. Периоды синуса и косинуса угла 276

68. Как решать тригонометрические уравнения? 279

69. Решение тригонометрических уравнений в заданном интервале углов 284

70. Что такое производная функции 290

71. Анализ функции с помощью вычисления ее производной 296

72. Приложение. Базовый уровень ЕГЭ. 304

73. Заключение 320

Образовательный центр Давуда Зулумханова

Тел. +7 964 094 94 49

[z.davud@mail.ru](mailto:z.davud@mail.ru)

<https://www.youtube.com/user/novykrug>

скорая педагогическая помощь

**Давуд Асадулаевич Зулумханов**

ПРОСТАЯ МАТЕМАТИКА

для маленьких и взрослых

*Пособие для родителей и не только*

Формат 60х84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.   
Тир. 100 экз. Размножено ИП «Бисултанова П.Ш.».

Махачкала, ул. М.Гаджиева, 34.

1. Часто, указывая на поднятый третий карандаш, ребенок говорит: «Три». Так его учили. [↑](#footnote-ref-1)
2. Каждый раз подбирайте группу палочек, которая делится нацело на предлагаемый делитель. [↑](#footnote-ref-2)
3. Томас Манн. Иосиф и его братья. [↑](#footnote-ref-3)