скорая педагогическая помощь

Д.А. Зулумханов

ПРОСТАЯ МАТЕМАТИКА

(Для маленьких и взрослых)

Махачкала 2015

УДК 51(078.8)
ББК 74.262.21
З - 937

Д.А. Зулумханов. Простая математика для маленьких и взрослых. – Махачкала, 2015. – 300 с.

Издание 3-е.

ISBN 978-5-904621-76-6

Многие родители, наверное, впадали в отчаяние после очередной безуспешной попытки помочь своему ребенку сделать уроки. Если ребенок еще в начальной школе, то попытка следует за попыткой. Но когда ребенок уже в 8-ом или в 10-ом – оставь надежды… Вся помощь сводится к окрику: «А уроки ты сделал?!»

Что делать? Ищите *Учителей*. А пока вы их ищете, скорая педагогическая помощь будет весьма кстати.

Оригинальная авторская методика позволяет неподготовленным читателям легко освоить базовый курс математики: от счета на палочках и натуральных чисел, до тригонометрических уравнений и исследования функций с помощью производных.

ISBN 978-5-904621-76-6

© Зулумханов Д.А., 2015

Предисловие

Никогда не помогайте ребенку делать школьные уроки. Вы этого не умеете делать и только все испортите.

Во-первых, вся ваша «помощь» сведется к тому, что уроки вместо него сделаете вы. А это – приучение к обману. Ведь в школе ребенок будет делать вид, что уроки сделал он сам.

Во-вторых, проверяя задания, учитель получает информацию, на основе которой делает свои выводы. Ваше вмешательство искажает эту информацию.

Делать уроки – значит, практиковаться в том, что уже изучено. Поэтому лучше, если не вы детям, а они вам будут помогать разбираться с тем новым, что они изучили, узнали в школе.

И, конечно, никогда не ругайте своего ребенка. Почему? Просто не ругайте и все! К частой ругани он скоро привыкнет и перестанет обращать внимания. Более того, постоянная ругань вселит в него уверенность в то, что вы его не любите и что он вам не нужен. Разубедить будет трудно. Даже если вы потом перестанете ругать и будете ласковы, он еще долго будет смотреть с недоверием. Очень часто из-за этого родители опять срываются в крик: «Ну что тебе еще надо?! Мы тебе и то сделали и то, а ты все смотришь волком!» Тем самым разрушая последнюю надежу ребенка на то, что вы были искренни.

Запрет на ругань не означает запрета на наказание. Только не надо путать его с карой, возмездием, насилием.

Наказание – это элемент обучения действию по правилам, от слова «наказ». И вы должны иметь смелость наказать за проступок. Но надо четко объяснить, за что ребенок наказан, какое именно правило он нарушил. Причем, это правило должно было быть ему заранее известно, и о наказании за нарушение, тоже должно было быть известно.

Наказание может быть достаточно простым: можно поставить в угол, запретить выходить из своей комнаты, лишить права смотреть телевизор или выходить во двор. Но высказать это надо, глядя прямо в глаза, и, самое главное, вы должны четко обозначить срок наказания. Если срок обозначен, то ни при каких обстоятельствах нельзя нарушать его. Ваша «жалость» будет понята или как слабость, или как нарушение вами самими правил игры. Поэтому, прежде чем объявить о наказании и о его *длительности*, хорошенько подумайте.

И помните, воспитывает не суровость наказания или большая его длительность, а обязательность и решительность в его применении. Пусть ребенок в наказание за проступок посидит в темной комнате ровно две минуты. Главное, чтоб он знал, за что он наказан и что после истечения двух минут он опять будет принят вами и о его проступке больше никто и никогда не вспомнит. Нельзя наказывать (даже напоминанием) за один и тот же проступок дважды.

Играйте с детьми чаще. Но помните: игра – это соревнование по правилам, которым подчиняются все. Вы сами – в первую очередь.

Первое правило любой игры: нельзя заставлять играть! Лучше всего, если вы сами с трудом, но согласитесь на предложение детей поиграть.

Второе правило: заранее точно должна быть обозначена длительность игры. Вы должны точно установить время, когда игра должна закончиться. Ни при каких обстоятельствах не соглашайтесь продолжить игру сверх заранее установленного времени. У детей, особенно возбужденных игрой, пропадает чувство времени, и они могут довести себя до полного изнеможения, сами того не замечая. Надо помочь им выйти из игры.

А где взять игры, да еще такие, чтобы с образовательным уклоном?

Они повсюду вокруг вас. Надо только научиться видеть или… немного вспомнить. Ведь и вы когда-то были детьми.

Урок 1, на котором простое становится сложным и не определенным

Самая интересная игра – та, которая рождается здесь и сейчас, как по волшебству. Станьте для своих детей волшебниками. Это нетрудно. Нетрудно, пока они вам верят.

Самый простой способ – притвориться, что вы не знаете чего-то, казалось бы, самого простого, что вы должны были бы знать. Этот прием прямо противоположен совершенно недопустимому случаю, когда рассерженный папа кричит на ребенка: «Как! Ты не знаешь таких простых вещей!!!»

Простых вещей для детей не существует.

Например, спросите ребенка, измеряли ли они что-либо в классе. Неважно что. Потом спросите его, а что значит *измерить*? Притворитесь, что вы не знаете, что это значит. Многим, думаю, и притворяться не придется. Но это замечательно, потому что это будет честно, и вы дадите шанс ребенку побыть в роли учителя. Главное – честно слушать, честно говорить о том, что вы поняли и чего не поняли, всегда соглашаться с верными доводами, никогда не пытаться успеть сказать правильный вариант раньше ребенка и искренне поблагодарить его за урок, если он будет успешно завершен. Потому что настоящий урок всегда получают обе стороны: и учитель, и ученик. Учитель так же нуждается в ученике, как ученик в учителе.

Основной инструмент учителя – вопрос. «Научить – значит, мудро спросить». Так говорил великий учитель Алкуин.

Мы тоже попробуем задать если не мудрые, то хотя бы простые вопросы, имея целью именно обучить.

Например:

– Что значит измерить?

– Ну, значит, измерить длину…

– Но я же не знаю, что значит измерить.

– Ну, измерить линейкой…

– А что надо сделать с линейкой, чтобы, например, измерить длину стола?

– Надо вот так…

– А ты не показывай, ты говори. А я буду делать то, что ты будешь говорить. Дай линейку. Так, что ты говоришь надо делать, чтобы измерить?

– Надо поставить линейку на стол…

– А она стоять не будет…

– Ну, положить…

– Положил!

– Да не туда…

– А куда?

– На угол…

– Всю линейку? Прямо на угол? Пожалуйста…

– Да не так!

– А как?

– Положить на начало стола…

– А где у стола начало?

– Ну, с краю стола…

– Вот, линейка на краю стола…

– Не так!

– А как?

– …

и т.д.

Это один из примеров, как самое, казалось бы, простое, вдруг становится очень сложным. А ведь достаточно было просто дать определение измерению.

Но, что такое *определение*?

В учебниках определения выделяют жирным шрифтом, но практически нигде не написано, что это такое. Да и вы сами вряд ли спрашивали себя о том, что же такое «определение».

Итак, ваша задача – вначале сделать все сложным. Ведь если это удастся, значит, знания у ребенка были не настоящие. Он просто заучил термины и пользовался ими, а вот понимал ли он их?

Как и в медицине: вначале диагноз, выявление проблемы, понимание проблемы, а уже потом лечение. Но если вам не удается найти проблему, это вовсе не значит, что ее нет. Может оказаться, что вы просто не можете ее заметить. Здесь на помощь должны прийти профессионалы.

И в данной книге, уважаемый читатель, проблемы будут появляться там, где вы их совершенно не ожидали встретить.

Урок 2, на котором сложное опять становится простым и определенным

Измерения сопровождают человека всю жизнь. Постоянно приходится что-либо измерять. Но вот описать словами процедуру измерения удается не сразу. Правда, и особой необходимости в этом не бывает. Но ребенок должен научиться описывать своими словами то, что он сам делает. Это очень важно! Ведь, иначе, он не научится описывать то, что он чувствует.

Для начала пусть он воспользуется вашей помощью. Попробуем описать процедуру измерения длины стола.

Пример: «Я беру линейку. Кладу ее на стол. Перемещаю ее так, чтобы один конец линейки совпал с ближним левым углом стола. Потом располагаю линейку вдоль той стороны стола, длину которой хочу описать. Отмечаю на столе положение второго конца линейки. Потом переношу линейку так, чтобы первый конец линейки совпал с моей отметкой. Отмечаю на столе новое положение второго конца линейки. И так, пока не доберусь до другого угла стола. Здесь я делаю отметку на линейке в том месте, которое совпадет с углом стола. Теперь считаю общее количество сантиметров. Длина стола описана: я провел измерение».

Такое или примерно такое получится описание процедуры измерения длины стола. На первый взгляд, как будто простое. Но попробуйте предложить сделать его вашему ребенку или попробуйте повторить описание сами. Будет забавно видеть, как в самых неожи-

данных местах возникают трудности. Превратите их в веселые трудности.

* * *

Каждый урок должен иметь цель.

Какая была цель, когда вы спросили, что значит измерить? Цель должна была быть. Без нее не стоило и спрашивать. Если ребенок не убедится в том, что ваш вопрос не праздное любопытство, а именно урок, т.е. действие, имеющее целью научить, он перестанет замечать ваши вопросы. Мы учим ребенка измерять, чтобы он смог в будущем описать размер чего-либо так, чтобы другой человек его понял.

А только ли для этого нужна ему учеба?

Если бы только для этого, то вряд ли люди когда-то в древности стали бы учиться… Ребенок начинает учиться не для того чтобы описывать размер и не потому что он беспокоится о своем будущем. Ребенок получает физическое удовольствие от процесса познания. Это врожденное его свойство. Если, конечно, оно уже не отбито «школой».

После того как ребенок научился без запинки описывать процедуру измерения, предложите ему построить кратчайшее описание. После нескольких его безуспешных попыток помогите ему, подсказав, что вся эта процедура – сравнение. Потом заинтригуйте тем, что в кратчайшем описании останется всего три слова. Наша цель как раз в этом и заключатся: в получении предельно краткого, кратчайшего описания.

Кратчайшее описание называется ***определением***.

На начальном этапе очень важно научить ребенка самостоятельно строить определения.

После нескольких попыток может получиться примерно следующее: измерить – значит, сравнить с линейкой… Но, что такое линейка? Пусть ребенок попытается вам описать, что такое линейка, ну а вы притворитесь, будто вы не знаете, что это такое.

Например:

– А что такое линейка?

– Ну, это такая… линейка…

– Линейка – это линейка?

– Это… это такая… деревянная… на ней такие деления, сантиметры!

– А сантиметры – это что?

– Сантиметры – это то, чем измеряют длину.

– Измеряем линейкой или сантиметром?

– Линейкой…

– А линейка – это что?

– ?

– А можно ли измерить длину карандашом?

– Нельзя…

– Ну почему? Вот я беру карандаш и сравниваю длину стола с длиной карандаша: у меня получилось… 12 карандашей.

– Но карандаши бывают разные!

– Отлично! А линейки?

– Тоже.

– Очень хорошо! А сантиметры?

– А сантиметры все одинаковые!

Описать длину чего-либо, значит сравнить ее с чем-то, чья длина всем известна, с тем, что принято за единицу длины. У нас – это один метр. Он всем известен. А то, что принято за единицу сравнения и известно всем, называют *эталоном*. Сантиметр – сотая часть этого эталона.

Следовательно, можем построить окончательное определение: **измерение – сравнение с эталоном**.

Теперь можно сделать обобщение. Пусть ребенок сам вначале попробует кратко пересказать суть всего, что было пройдено. Вы ему только помогайте.

Здесь надо отметить, что «ребенку», с которым можно так вести уроки, может быть и 8 лет, и 18 лет. Результаты будут одинаковыми.

Урок 3, на котором у определений появляются термины

Повторение – мать учения.

Верно. Но повторение нужно не только для учения. Повторение помогает ребенку заметить собственные успехи. Успех окрыляет, дает силы двигаться дальше. Повторение напоминает ребенку, каким он был раньше, помогает ему сравнить себя нового с собой прежним и увидеть разницу, заметить собственное развитие. Часто, после такого сравнения, он уже сам улыбается своим прежним ошибкам и страхам. И это помогает ему справиться со страхами новыми.

Ребенок не замечает, как сам растет. Да и родители этого часто не замечают. Но стоит начать отмечать рост ребенка зарубкой на косяке двери, как все меняется. Появилось с чем сравнивать.

Повторим содержание предыдущих уроков.

Вначале пусть это сделает ребенок. Пусть теперь он будет в роли учителя. Вы – только помогаете. У него должно получиться примерно следующее.

«Измерить – значит сравнить с эталоном. Эталон – это то, что принято за единицу сравнения и известно всем. Единицей сравнения длины является 1 метр. Измерить длину чего-либо – значит, сравнить его с 1 метром или 1 сантиметром. Сравнение производят с помощью линейки».

Теперь остается отметить, что измерить массу – значит, сравнить с эталоном массы, т.е. с 1 кг; измерить площадь – значит, сравнить с эталоном пощади, т.е. с 1 кв.м и т.д. Вышли на универсальность данного определения.

Как будто все… Все для данной темы под названием «Измерение»

Здесь наступает критический момент. Исчезла интрига. Закончилась игра, и появилось ощущение разочарования.

– И это все? – как будто спрашивает ребенок. – Дальше будет обычная рутина обычных уроков?

Нет, конечно. Самое интересное только начинается. Причем, по тем же правилам, что и прежде. Мы будем находить необычное, непонятное в самом, казалось бы, обычном и понятном. Нужны парадоксальные вопросы.

Как научиться ставить вопросы? Ведь именно вопрос есть самое главное в обучении. Вспомним Алкуина: «Научить – значит, мудро спросить».

Предыдущий урок закончился тем, что построили *определение термина «измерение».* Как будто все понятно. Ну, так и спросите вашего ребенка, все ли ему понятно? Он, конечно, ответит, что все. Предупредите, что здесь его ждет ловушка. На самом деле ему не все понятно. Но он будет настаивать и даже попытается повторить определение…

Вот тут вы его и застигнете врасплох: а что такое определение?

Он этого не знает. Думаю, и вы уже не помните. Хотя на прошлом уроке мы дали определение *определению*. И вы тоже застигнуты врасплох. Более того, ребенок теперь сам может пойти в атаку и спросить, а что такое *термин*?

Обыватель, не знакомый с предыдущими уроками, из выражения «дайте определение термина измерение», поймет только одно слово – дайте. Остальными словами он пользуется скорей по привычке. Прав-

да, ему большего и не надо, он свою учебу давно закончил. Но тем, кто все еще учится и учит, надо иметь четкое представление о каждом слове. Иначе будет невозможно учиться и учить.

Что же такое *определение*? Рассмотрим его еще раз. Пойдем по той же процедуре, по которой мы получили ответ на вопрос, что значит измерить? Начнем с описания.

Начертите окружность и попросите ребенка описать своими словами то, что он видит. Он ответит, что это круг.

Теперь попросите его не пользоваться словом круг и словами однокоренными со словом круг (кружок, окружность и т.д.). Он, скорее всего, скажет, что это колесо или солнце или еще что-нибудь. А вы напомните ему, что он должен описать только то, что он видит. Ни колеса, ни солнца здесь нет. Что это?

Замешательство, в которое придет ребенок, не должно вас расстраивать или сердить. Ведь вы и сами в некотором замешательстве. Если не читать текст дальше и самостоятельно попытаться построить описание того, что вы сами начертили, то и у вас не сразу получится. Так что войдите в положение ребенка и совместно с ним преодолевайте препятствия.

После нескольких его безуспешных попыток, начертите рядом с окружностью прямую линию. Спросите, что это? Ребенок скажет, что это линия. Какая? Прямая.

Теперь начертите рядом с прямой линией кривую и спросите, какая она. Ответы могут быть разные. Обычно говорят, что это волнистая или неровная линия.

Напомните, что все непрямые линии называются *кривыми*. Следовательно, это – кривая линия.

Теперь возвращаемся к первому рисунку. Это – тоже кривая. Чем отличаются две кривые? Помогите ребенку увидеть, что одна кривая замкнутая, а другая – нет.

Итак, что это? Это – кривая линия, начерченная на листе бумаги, и она замкнута. Отлично!

Замкните теперь вашу вторую кривую. Просто проведите карандашом линию, соединяющую концы кривой. Теперь и она замкнута. Чем отличаются две замкнутые кривые?

Поставьте точку в центре окружности и точку примерно в центре вашей второй замкнутой кривой. Да, первая кривая равноудалена от своей точки, а вторая – нет.

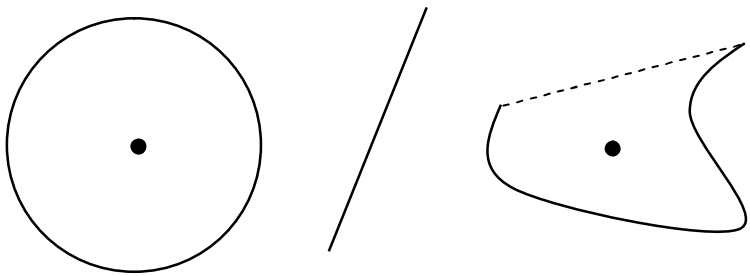


Рис. 1

Кратчайший вариант получившегося описания будет: *замкнутая кривая, равноудаленная от данной точки*.

Кто бы ни описывал, кто бы ни пытался получить кратчайший вариант описания, предельно краткое, т.е.

кратчайшее описание у всех будет одинаковым, потому что кратчайший вариант всегда **единственен**.

Кратчайшее описание называется ***определением.***

Так как определение единственно, то ему можно дать имя и в дальнейшем пользоваться только им.

Имена определений называются ***терминами***.

Термин, который мы присвоим нашему полученному определению, т.е. замкнутой кривой, равноудаленной от данной точки, будет *окружность*.

Можно заметить, что в глазах ребенка появился огонек. Он не просто понял что-то, он теперь знает, как это делать. Это для него очень важно. И он боится потерять только-только обретенное знание… Обычно, дети порываются записать то, что поняли.

Но, нет. Записывать мы пока не будем. Записывать мы будем только после того, как научимся свободно говорить. Поэтому продолжим.

Попробуем тем же методом описать еще что-нибудь.

Начертим известную уже окружность. Соединим две точки окружности отрезком. (Рис. 2).

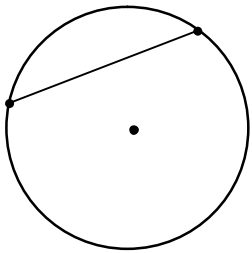


Рис. 2

Спросите ребенка, – что это? Пусть опишет и получит кратчайшее описание (*определение*).

Подскажем, что это отрезок. Но не любой, а такой, что его концы лежат на окружности. Сообщите, что в кратчайшем варианте должно остаться только пять слов.

В итоге должно получиться определение: *отрезок, соединяющий две точки окружности.*

Сразу сообщим, что имя этого определения – *хорда*. Это новый *термин*.

Постройте отрезок, соединяющий две точки окружности так, чтобы он пересекал центр окружности (рис. 3). Спросите, хорда ли это?

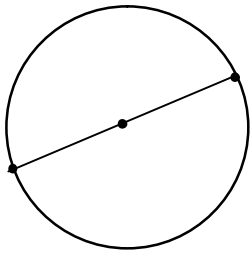


Рис. 3

В большинстве случаев дети говорят, что нет.

А вы попросите описать его. Добейтесь, чтобы ребенок сказал, что это отрезок, соединяющий две точки окружности. И как он называется? Конечно, хордой. Только в отличие от других хорд, данная хорда пересекает центр окружности. Она делит окружность на две равные части и поэтому заслужила отдельный термин: *диаметр*. Его определение: *диаметр – хорда, пересекающая центр окружности.*

Заметим, что для построения данного определения мы использовали термины, полученные ранее: «хорду» и «окружность».

Соединим точку окружности с ее центром (рис. 4). Получили отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. Это – *радиус*.

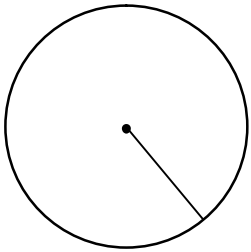


Рис. 4

Итак, все работает! Мы научились давать имена.

Теперь мы знаем то, что и раньше как будто знали.

Совет родителям: прежде чем провести этот урок с ребенком, прорепетируйте его друг с другом. :))

Урок 4, на котором учимся считать

Вы научили ребенка **наблюдать**, **описывать** наблюдаемое, строить **определение** и присваивать ему **термин**. Что дальше?

Дальше будем учиться считать.

Вы, конечно, считать умеете. Но для того, чтобы научить считать ребенка, надо самому понять-вспомнить, что это значит, а потом научиться объяснять…

Но прежде надо, чтобы появилась необходимость в счете. Иначе трудно будет объяснить, почему на эту процедуру надо тратить время и силы. Попробуйте сами себе внятно объяснить, как появилась необходимость в счете и сравните с тем, что будет дальше.

Ребенок уже знает, что такое окружность. Начертите на листе бумаги несколько окружностей. Обратите внимание на то, что один и тот же термин может быть у нескольких объектов. Окружностей теперь много.

А много – это сколько?

Как передать другому человеку информацию о количестве, т.е. как описать количество?

Положите на стол три карандаша. Если другой человек рядом, то вы просто показываете ему карандаши, и он сам видит, сколько их. Но если вы вышли на улицу и кто-то спросил, сколько было на столе карандашей, то нужно описать их количество, а для этого их нужно **сосчитать**.

На первый взгляд, кажется, что ничего сложного здесь нет. Считать умеют все. Но, посмотрим, так ли это.

Положите перед ребенком три карандаша и попросите их сосчитать. Скорее всего, он сразу скажет «три». А вы попросите его все-таки сосчитать. Сосчитать именно эти карандаши. Он начет, указывая пальцем на каждый карандаш, говорить: «раз, два, три». Как только он укажет пальцем на третий карандаш и скажет «три», поднимите этот карандаш и спросите, сколько это? Он скажет, что «один»[1]. А почему он только что сказал, что это «три»?

Пусть еще раз сосчитает. Он опять начнет показывать поочередно на карандаши и говорить: «раз, два, три». Как только он укажет на 2-ой карандаш и скажет «два», остановите его, поднимите этот карандаш и спросите, сколько это? Он скажет, что это «один». А почему он сказал, что это «два»? Пусть еще раз сосчитает.

Ребенок уже в некотором замешательстве. Он как будто делает все верно, но счет не получается. Тогда он отчаянно скажет, указывая поочередно на карандаши: «раз, раз, раз».

Тут уже ваш черед отчаянно воскликнуть: «А где же счет? А если бы карандашей было сто?»

Но, вспомните, как ваш малыш учился ходить. Вы же не кричали на него, когда у него ничего не получалось. Вы помогали ему снова и снова, утешая после каждой неудачи. А как вы радовались первому его

---

[1] Часто, указывая на поднятый третий карандаш, ребенок говорит: «Три». Так его учили.

самостоятельному шагу! И вы не скрывали от него своей радости. И малыш это чувствовал и рвался делать еще шаг… Пусть теперь вашему ребенку десять лет, пятнадцать… Он – все тот же малыш. Он все так же нуждается в вашем утешении и в вашей радости…

Что же такое счет?

Покажите ребенку карандаш и скажите: «это – один карандаш». Потом спросите, какое слово вы сказали лишнее? Будет хорошо, если ребенок быстро догадается, что это слово «один». «Карандаш» и так в единственном числе. Добавлять, что он один, нет необходимости. Теперь поднимите три карандаша и скажите, что это карандаши. Потом поднимите пять карандашей и скажите, что это тоже карандаши. Но количества карандашей в первом и во втором случаях разные. Если мы говорим «карандаши», во множественном числе, то нужно описать их количество. Описание количества и есть *счет*. Но описание количества чего и где?

Возьмите три карандаша, две ручки и один фломастер. Спросите, сколько здесь карандашей? Ребенок ответит, что три. А сколько ручек? Две. А сколько фломастеров? Один. А сколько предметов? Шесть!

Почему каждый раз были разные ответы?

Потому что речь шла о разных терминах: вначале карандаши, потом ручки, затем фломастеры и, наконец, предметы.

Набор одноименных предметов называется **группой.**

Термины, обозначающие количество единиц в группе, называют **числительными**.

Символы, обозначающие количество – **цифры.**

Надо добавить, что есть исчисляемые группы и неисчисляемые группы. Неисчисляемые, например, – звезды на небе или листья в лесу.

Вспомните, как считали в 1-ом классе? Считали счетными палочками. Заметьте, считали не палочки, а палочками. А как это?

«Дети, на картине много птиц. Сосчитайте их. Считать надо так: одна птица – отложили одну палочку, еще одна птица – отложили еще одну палочку… и так, пока не пересчитаем всех птиц. А теперь, покажите, сколько всего птиц на картине? Верно, столько же, сколько у вас получилось палочек. Палочки вы можете унести с собой и показать дома маме. И мама узнает, сколько было птиц на нашей картине».

Сосчитать – значит, описать количество единиц в данной группе.

А если единиц очень много? Так и видим, как отец послал сына сосчитать баранов в его отаре, а сын привез целый мешок палочек… 3457 штук. На этот случай в наборе первоклассника есть разноцветные палочки. Десять белых палочек обозначим одной красной, десять красных – одной синей, а десять синих – одной черной. Значит, сын должен принести отцу всего три черные палочки, четыре синих, пять красных и семь белых палочек. Надо только запомнить цвета…

Правда, если по дороге сын случайно обронит одну черную палочку, то он ошибется на тысячу овец.

А если делать зарубки на дощечке? Десять зарубок – один крестик. А десять крестиков…. Уже появляются ***цифры*** (римские, например) – символы, обо-

значающие количество одноименных объектов в группе.

Сегодня для счета мы пользуемся не палочками и даже не цифрами, а числами. И описываем не группу, а множество.

Числа невозможно представить, но ими можно считать… Множество (как математический термин) тоже нельзя представить, тем не менее, им можно пользоваться.

Попробуйте представить число 5. У вас ничего не получится. Символ в виде «5» – это не число, это – цифра. Ее же можно записать и римскими цифрами – V.

Если вы представили пять предметов, то это только пять предметов, а не число. Число представить невозможно.

Но вы можете совершать действия над числами, считать числами, а уже полученный результат записать цифрами или числительными.

Точно также, попытка представить множество приведет к описанию группы.

Ребенок вначале учится группировать одноименные предметы. Потом он учится различать их по количеству. Потом он запоминает названия количеств. Например, сегодня мы учимся распознавать группы по три одноименных элемента. На столе три карандаша – это *группа*. Найдите в комнате еще группы по три. Верно, три цветка в вазе, три богатыря на картине, три стула в комнате…

Числа, описывающие количество единиц в группе, называют **натуральными** (природными). Натуральные числа – все целые положительные числа от

единицы, до бесконечности. Пример натуральных чисел – римские цифры. Здесь, все числа положительные целые и нет нуля. Почему древние греки и римляне не знали нуля, и у кого он появился впервые – разговор особый. Мы к нему вернемся позже.

На получение эффекта автоматического различению и распознавания групп по количеству единиц в них и запоминания соответствующего числительного нужно время. Главное – не торопиться, ведь ваш малыш уже умеет считать и на вопрос, сколько ему лет, гордо показывает три пальчика…

Урок 5, на котором появляется арифметика

Группы можно складывать и вычитать. Если к группе из пяти карандашей прибавить группу из двух карандашей, то получится новая группа из семи карандашей. Причем неважно, речь идет о группе карандашей, ручек или стульев… Лишь бы это были *группы*, т.е. наборы *одноименных* объектов. Впоследствии слово группа постепенно перестает упоминаться. Так и говорят: «пять плюс два будет семь». Тем не менее, появилось первое арифметическое действие – сложение.

В самом деле, у нас есть, допустим, группа из двух карандашей и еще одна группа из трех карандашей. Так как и в первой, и во второй группах термины одинаковые, то мы можем объединить эти две группы в одну. Получится новая группа. В ней пять карандашей.

Допустим, у нас есть группа из трех карандашей и группа из двух ручек. Так как термины в группах разные, мы не можем объединить их в одну группу. Чтобы объединить их в группу, надо подобрать *общий* для обеих групп термин. Следовательно, стоит нам сказать, что первая и вторая группы состоят из *предметов*, то объединение возможно: получится группа из пяти предметов.

Итак, объединяться в группу, как мы уже говорили, могут только одноименные термины. Следовательно, *сложение – это объединение одноименных групп*.

Мы подошли к очень важному моменту. Вначале нужно добиться понимания и воспроизведения выражения: *к **группе** из трех карандашей прибавить **группу** из двух карандашей получится **группа** из пяти карандашей.*

После доведения ребенком до автоматизма воспроизведение этой формулировки, можно перейти к ее сокращенному варианту: *к группе «три» прибавить группу «два» будет группа «пять».*

И наконец, после усвоения данной формулировки, можно перейти к окончательному варианту: *три прибавить два будет пять.*

Результат сложения будем называть *суммой.*

Из группы, состоящей из пяти карандашей, удалим группу из двух карандашей, останется группа из трех карандашей. Это уже вычитание.

Более краткая форма будет: *из группы «пять» удалить группу «два» получится группа «три».*

Окончательная формулировка: *пять отнять два будет три!*

Удаление группы из группы, называется *вычитанием.*

Результат вычитания называется *разностью*.

А что же такое умножение?

Рассмотрим последовательное сложение групп с одинаковым количеством единиц в каждой.

Например, к группе «три» прибавим группу «три», потом еще группу «три», потом еще группу «три». Мы сложили четыре одинаковые группы. Т.е. взяли группу «три» четыре раза (четырежды). Результат такого сложения можно запомнить. В следующий раз сумма четырех одинаковых групп по три единицы

в каждой, сразу может быть названа группой «двенадцать».

Последовательное сложение одинаковых групп будем называть *умножением.* Выучить наизусть результаты сложения одинаковых групп означает выучить таблицу умножения.

У нас по традиции таблица умножения строится до 10. Но раньше она была до 12 (до дюжины дюжин).

Демонстрацию процедуры умножения, так же как и сложения и вычитания, удобно проводить с помощью тех же палочек. Предложите ребенку самому продемонстрировать умножения различных чисел с помощью палочек. Это у него легко получится. Но получится ли у него демонстрация деления.

Урок 6, на котором учимся делить восемь палочек на два

А что такое деление?

Сколько будет 8 разделить на 2?

Ребенок сразу ответит: «четыре».

Разложите перед ним восемь палочек и попросите разделить на два. Он, скорее всего, разделит всю группу на две части и скажет, вот – четыре.

А вы спросите, четыре чего?

Оно покажет на одну часть, в которой четыре палочки, и скажет: вот, четыре палочки.

– А в другой части сколько?

– Тоже четыре.

– Значит, сколько всего?

– Восемь.

– Т.е., восемь разделить на два будет восемь?

Восемь разделить на два получатся две группы по четыре, т.е. восемь, т.е. $8:2=2\times4$… Но, позвольте, как же так? Это же не верно!

А как?

Хорошо, давайте по-другому. Все знают, что если разделить все что угодно на два, то получатся две половинки. Поэтому восемь разделить на два будет два! Правильно. Но кто-то считает, что будет четыре. Четыре чего? Откуда взялись четыре?

Очень получится занимательный разговор.

Что же такое деление?

Сейчас вы раскроете ему секрет, который окажется вовсе не секретом, а тем, что он и так знал и очень хорошо понимал. И совершенно зря он себе перестал доверять и доверился колдунье!

Восемь разделить на два, значит разложить (разделить) группу «восемь» на группы по «два». Получатся четыре группы по «два».

Ребенок будет в восхищении. Он будет наблюдать за вами как за фокусником или как за волшебником, который вдруг в его битве со злыми колдуньями, пришел ему на помощь!

О чем это я?

Ребенок с самого первого класса знал: все, что угодно разделить на два будет два. А разделить на три – будет три. Значит, восемь разделить на два будет два, а разделить на три будет три. Но злая учительница кричала, что нет! Что он ошибается!! Что он неуч!!! Каким-то немыслимым образом у нее получалось, что восемь разделить на два будет четыре. А на три, – продолжала она кричать, – восемь вообще не делится!

А тут вы говорите такие понятные, простые вещи. Чары колдуньи начинают разрушаться.

Деление – процедура обратная умножению. Следовательно, это будет последовательное вычитание одинаковых групп из группы с последующим их счетом. Эта процедура позволяет выяснить, на сколько одинаковых групп по определенному количеству в каждой, можно разбить данную группу. Арифметическое действие «деление» – описание количества групп в группе.

Например, сколько групп по «три» в группе «двенадцать». Получаем, четыре группы по «три». Простейший способ выяснить это – последовательно вычитать группы по «три» из группы «двенадцать» и сосчитать их.

Отсюда ясно, почему нельзя делить на ноль? Нельзя разделить данную группу на группы, которых нет.

Положите перед ребенком кучу палочек и предложите разделить ее на «три»[1]. Он, скорее всего, вначале начнет считать палочки. Потом, в уме разделит полученное число на три и только потом начнет делить группу палочек на группы по три.

Положите перед ребенком новую группу палочек и предложите разделить ее на четыре. Причем, без выяснения, сколько всего палочек в данной группе.

Если ребенок догадается, последовательно отнимать группы по четыре, вы должны обязательно выразить восхищение его догадливостью.

В дальнейшем, когда ребенок начнет учить таблицу умножения, предложите ему воспользоваться для счета палочки. Процесс заучивания пойдет гораздо быстрее и интереснее.

Точно так же, когда начнете практику деления двузначных цифр на целое число, вместо таблицы умножения на оборотной стороне тетради в клетку, предложите ребенку использовать те же палочки.

---

[1] Каждый раз подбирайте группу палочек, которая делится нацело на предлагаемый делитель.

Урок 7, на котором появляются дроби

Сколько длин радиусов уместится на длине диаметра?

Это мы знаем. На длине диаметра уместятся две длины радиуса. У нас даже есть формула $d = 2r$. Длина диаметра равна двум длинам радиуса.

А сколько длин диаметра уместятся на длине радиуса?

Здесь у ребенка возникнет проблема. Он знает, что диаметр длиннее радиуса… Но вопрос был задан. Значит, надо отвечать. И он, скорее всего, скажет, что нет, ни один диаметр не поместится.

Да, целый диаметр не поместится. Но какая-то его часть поместится. Надо просто описать эту часть.

А как описывать части целого?

Часть целого описывают с помощью *дробей*.

А что это такое?

Спросите, сколько половинок в целом?

Ребенок опять задумается.

Спросите, а сколько половинок в целом яблоке?

Я получал на этот вопрос самые разные ответы: от 1 до 6 половинок…

Это нам взрослым все как будто понятно. Дети только-только привыкают к новым терминам.

Итак, после того как выяснится, что половинок все-таки две, покажите как будет обозначаться одна половинка. Это $\frac{1}{2}$. Читается: одна вторая. Это будет обозначение половинки. Половинка чего?

Мы знаем, что просто половинки не бывает. Существует только половинка чего-то. В нашем случае – это половинка группы.

Цифры, показывающие части целого (группы) называются *дробями*. Черта между цифрами так и называется «дробной чертой». Цифра над чертой называется «числитель», а под чертой – «знаменатель». Знаменатель показывает величину части (доли), а числитель количество этих долей.

А сколько третьих частей яблока в яблоке?

Правильно, три.

А как обозначить одну из этих третьих частей?

Обозначим $\frac{1}{3}$ (одна третья).

Одна третья чего? Яблока.

А сколько четвертых частей яблока содержится в яблоке? Четыре. Обозначаться она будет $\frac{1}{4}$ (одна четвертая).

Одна четвертая чего? Яблока.

А на сколько пятых частей яблока можно разделить яблоко? Конечно, на пять. Значит, одна из этих пяти частей будет обозначаться $\frac{1}{5}$ – одна пятая.

Одна пятая чего? Яблока.

Можно продолжать этот счет до тех пор, пока ребенок окончательно не поймет, что такое части целого и как они обозначаются. И здесь очень важно объяснить, что просто отдельных дробей не бывает. Нет просто двух третьих! Есть только две третьи чего-то.

Если мы записали дробь $\frac{3}{5}$, то это означает не просто три пятые, а три пятые от чего-то. В данном случает, три пятые от одной целой, т.е. от единицы. Предполагается, что изначально запись была такой: $\frac{3}{5}\cdot 1$. Просто единицу не пишем.

С долями группы, т.е. с дробями, можно проводить те же арифметические действия, что и с целыми группами. Их можно складывать, вычитать, умножать и делить. Главное, чтобы доли были *одинаковы*. Только в этом случае они образуют свои группы, которые можно складывать.

Итак, складывать и вычитать можно только одинаковые по размеру доли. Количество долей показывает числитель.

Попробуем произвести сложение дробей.

Сколько будет, если к одной пятой (доле) прибавить еще одну пятую. Ясно, что получится группа из двух пятых долей, т.е. две пятые или $\frac{2}{5}$.

Сколько пятых частей яблока получится, если к одной пятой части прибавить еще две пятые? Конечно, три пятые части.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Теперь можно порешать «примеры»:

$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=$ $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=$ $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=$

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=$ $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=$ $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$

Точно так же можно вычитать из дроби дробь

$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$ $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=$ $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=$

$\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=$ $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=$ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$

Все легко и понятно.

А теперь огорошьте ребенка вопросом, а сколько будет, если от единицы вычесть одну четвертую.

Ребенок задумается.

Спросите сразу, а сколько четвертых частей в единице? Помогите догадаться, что четыре четвертые части.

А сколько отняли?

Одну четвертую часть.

А сколько осталось?

Три четвертые части!

Так и запишем.

$$1-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

А сколько будет, если от единицы вычесть две седьмые?

А сколько седьмых в единице? Правильно, семь седьмых. А сколько отняли? Две седьмые. А сколько осталось? Пять седьмых.

$$1-\frac{2}{7}=\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

А сколько будет, если от единицы вычесть пять девятых?

А сколько девятых в единице? Девять. А сколько отняли? Две. Сколько осталось? Четыре! Четыре девятых.

$$1-\frac{5}{9}=\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

Обратите внимание ребенка на то, что каждый раз при вычитании дроби от единицы, мы как бы вычитаем числитель от знаменателя!

Порешайте еще примеры:

$1-\frac{3}{7}=$ $\quad$ $1-\frac{8}{9}=$ $\quad$ $1-\frac{12}{13}=$

$1-\frac{4}{5}=$ $\quad$ $1-\frac{1}{8}=$ $\quad$ $1-\frac{20}{27}=$

$1-\frac{2}{7}=$ $\quad$ $1-\frac{3}{5}=$ $\quad$ $1-\frac{122}{127}=$

Опять все легко и просто!

Усложните задачу. Спросите, а сколько будет, если от двух вычесть три седьмые?

$$2-\frac{3}{7}=$$

Ребенок опять задумался.

Это хорошо, что задумался. Надо, чтобы он как можно чаще задумывался, распознав новый вид задач. И надо, чтобы он как можно чаще находил решение. Это научит его не бояться новых задач.

Разложим две целые на единицу и единицу. Из одной единицы вычтем три седьмые, получатся четыре седьмые, и прибавим вторую единицу, получится одна целая четыре седьмых.

$$2-\frac{3}{7}=1+1-\frac{3}{7}=1+\frac{4}{7}=1\frac{4}{7}.$$

Давайте, еще.

$$5-\frac{2}{9}=4+1-\frac{2}{9}=4+\frac{7}{9}=4\frac{7}{9}.$$

Придумайте еще с десяток примеров…

А еще лучше, пусть он вам составит несколько примеров и проверит, правильно ли вы их решили.

Очень хорошо!

Теперь проверим, насколько хорошо ребенок понимает, что он делает. Предложите ему продемонстрировать сложение и вычитание дробей на палочках. Скорее всего, он воскликнет, что на палочках этого сделать нельзя, т.к. палочки целые. Даже попытается разломить палочку на кусочки…

Остановите его и напомните, что речь идет о группах. Т.е., дроби – это цифры, показывающие количество частей целой группы. Поэтому нет необходимости ломать палочку на части. Можно представить одну палочку, как часть одной целой группы. В этом случае одна палочка уже играет роль не единицы и части от единицы, т.е. становится долей целой группы (дробью).

Например, разложите на столе четыре палочки. Соберите их в вместе и скажите, что это одна целая группа, т.е. это единица. (Рис. 5).

Если четыре палочки – это одна целая группа (единица), то, что собой представляет одна отдельная палочка? Конечно, четвертую часть от целой группы (единицы). Т.е., в данном случае одна палочка играет роль уже не единицы, а одной четвертой от единицы.

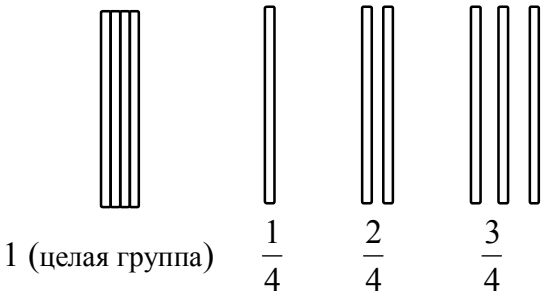


Рис. 5

Как продемонстрировать сложение дробей?

Очень просто. К одной четвертой (1 палочка) добавим еще одну четвертую, получим две четвертые. Добавим еще одну – получим три четвертые.

А как показать одну пятую?

Возьмем группу из пяти палочек и скажем, что это одна целая группа. Тогда, одна палочка будет одна пятая часть от этой группы.

А как показать на палочках одну восьмую?

Возьмем группу из восьми палочек и скажем, что одна целая группа, т.е. единица. Тогда одна палочка – это одна восьмая ее часть, т.е. просто одна восьмая.

Конечно, можно было пожертвовать палочкой, разломать ее на части и демонстрировать дроби… Но, жалко ломать. И потом, в этом случае ребенок привыкает, что дробь – это только часть (доля) единицы. Поэтому в дальнейшем придется приложить немало усилий, чтобы научить его брать дробь не только от единицы, но и от произвольного числа.

На самом деле, дробь – это часть группы.

Предложите еще раз разделить группу из восьми палочек на группы по два (восемь разделить на два). У него получатся четыре группы по два.

Каждая получившаяся группа есть четвертая часть от начальной группы восемь. А как обозначить эту часть группы? Конечно дробью $\frac{1}{4}$. Одна четвертая чего? Конечно восьми.

А теперь попросите разделить восемь на три…

Он начнет делить и скажет, что не делится!

Тем не менее, пусть опишет, что получилось.

Итак, из группы «восемь» последовательно отнимаем группы «три» и считаем количество таких групп. У нас получатся две целые группы по три палочки и одна нецелая группа, в которой только две палочки.

Спросите, а сколькой должно было быть в последней группе палочек. Он скажет, три. А сколько имеем? Только две. А как эту нецелую группу назвать? Так и назовем: «две третьи».

Итак, у нас получилось «две целые две третьи». Это *смешанное число*. В нем одновременно есть целая и дробная части, они смешались….

С другой стороны, каждая целая группа у нас состоит из трех палочек. Как назовем одну палочку? Правильно, – «одна третья». Сколько всего таких палочек в «двух целых двух третьих»? Верно, восемь. Восемь каких? Третьих. Т.е. $2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$. Здесь, числитель больше знаменателя.

Дроби, у которых числители больше знаменателей, называют *неправильными дробями.*

Теперь поупражняйтесь в делении чисел на палочках, получении смешанных чисел и переводу смешанных чисел в неправильные дроби и наоборот. Вы уже знаете, как это делать. У вас получится.

Урок 8, на котором появляются дроби, которые не хотят складываться

Когда ребенок будет в полной уверенности, что теперь-то он все может, дайте ему следующее:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$$

Некоторые дети задумаются, а некоторые смело напишут $\frac{2}{5}$.

Прежде всего, надо напомнить, что складываются и вычитаются только одинаковые доли. В последнем примере доли не одинаковые.

Как к одной второй доле прибавить одну третью?

Нарисуйте на листе бумаги половину яблока и третью часть яблока. Продемонстрируйте, что они разные по величине и что в результате сложения получится нечто, что сразу и не опишешь. Т.е. опять получаются одна вторая и одна третья доли.

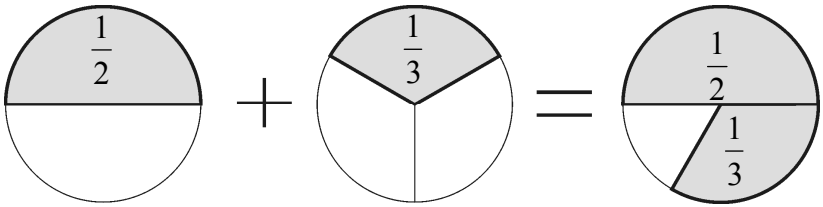


Рис. 6

Разные по величине доли не объединяются в одну группу. Точно так же, как не объединяются в одну группу предметы с разными названиями (терминами).

Что делать?

Напомните, что для объединения двух групп с разными терминами в одну группу, мы подбирали для них общий термин.

Так же поступим и с разными долями. Подберем для них общую долю. Т.е. долю, которая поместилась бы в обе наши неравные доли целое число раз.

Вначале спросите, какая доля меньше: одна вторая или одна третья?

Часто говорят, что одна вторая меньше. Когда убедитесь, что все-таки одна третья меньше, предложите ее в качестве общей доли. Выясните, уместится ли третья доля во вторую целое число раз. Нет, не поместится.

Разделим третью долю на две части. Получатся две шестые доли. Может шестая доля и есть общая доля. Одну третью можно представить как две шестые. А одну вторую?

Разделим одну вторую на шестые доли. Получатся три шестые.

И в первом и во втором случаях, теперь, имеем одинаковые по величине шестые доли.

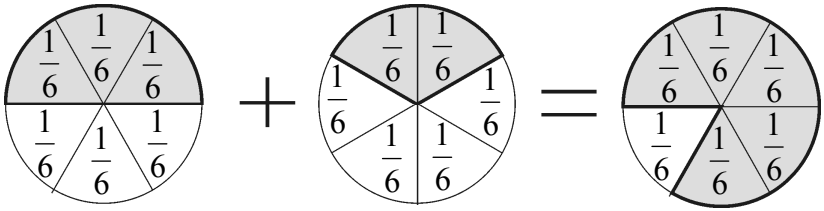


Рис. 7

В одной второй содержатся три шестые доли и в одной третьей – две шестые. Всего – пять шестых долей!

Следовательно,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Вот такой несколько странный результат.

Тем не менее, это верный результат.

Но, не будем же мы каждый раз рисовать кружочки, когда будем складывать разные доли.

Нет, конечно. Для сложения (и вычитания) дробей с разными знаменателями нашли более простой способ.

Рассмотрим еще раз запись нашей суммы:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=.$$

Как быстро подобрать общий знаменатель (общую долю)? Просто надо подобрать наименьшее число, которое делится на оба знаменателя. Это число 6. Следовательно, общая доля у нас одна шестая.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{}{6}$$

Теперь, надо привести оба знаменателя к общему знаменателю 6. Для этого первый знаменатель умножим на два, а второй на три. Но чтобы сами дроби по величине не изменились их числители тоже умножим на те же множители, что и знаменатели.

$$\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{}{6}$$

Получим

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}\quad .$$

Рассмотрим еще пример.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=$$

Какое число делится и на 8, и на 6?

Обратите внимание, что вначале дети будут упорно пытаться подобрать число, на которое делятся 8 и 6.

Возьмем из этих двух чисел бóльшее, т.е. число 8. Оно делится на 8, но не делится на 6.

Умножим 8 на 2. Получим 16. (Так как 8 у нас в знаменателе, то умножение его на 2 уменьшит дробь в два раза и мы получим 16-ую долю.)

16 делится на 8, но не делится на 6.

Умножим 8 на 3. Получится 24.

24 делится и на 8, и на 6.

Следовательно, наименьший общий знаменатель будет 24. Чтобы получить одинаковые знаменатели в первой и во второй дробях, нужно числитель и знаменатель первой дроби умножить на три, а второй – на четыре

$$\frac{1\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{1\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{3}{24}+\frac{4}{24}=\frac{7}{24}$$

Давайте, еще.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$$

На оба знаменателя делится число 15. Это общий знаменатель, следовательно общая доля будет $\frac{1}{15}$.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{\quad}{15}$$

Чтобы получить одинаковые знаменатели в первой и во второй дробях, нужно в первой дроби числитель и знаменатель умножить на три, а во второй – на пять. Только для удобства, запишем их как дополнительные множители:

$$\overset{3)}{\frac{3}{5}} + \overset{5)}{\frac{2}{3}} = = \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15}$$

Вычислите.

$\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=$ $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}=$ $\frac{5}{7}+\frac{1}{21}=$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=$ $\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=$ $\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=$

$\frac{1}{7}+\frac{3}{14}=$ $\frac{7}{9}-\frac{1}{2}=$ $\frac{5}{9}+\frac{1}{4}=$

Итак, мы научились складывать и вычитать обыкновенные дроби.

Урок 9, на котором выясняется, что отнять и взять – не одно и то же

От двенадцати целых отнять три четвертые будет одиннадцать целых одна четвертая. Т.е.,

$$12 - \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$$

А сколько будет, если от двенадцати целых взять три четвертые?

Кажется, что нет разницы между «взять» и «отнять». Но, это только кажется.

При вычитании получается разность. Т.е. мы должны назвать количество, которое остается после вычитания.

Взять три четвертые от двенадцати – это значит, мы должны назвать количество, которое взяли…

Взяли сколько и чего?

Мы уже отмечали, что дробь $\frac{3}{4}$ означает не просто три четвертые, а три четвертые от чего-то. В данном случает, три четвертые от единицы. Предполагается, что изначально запись была такой: $\frac{3}{4} \cdot 1$. Просто единицу не пишем. Следовательно, $\frac{3}{4}$ от 12 будет в 12 раз больше, т.е. $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

Вначале группу «двенадцать» нужно разделить на группы по четыре. Получатся три целые группы по

четыре. Их нужно взять три раза. Это составит девять целых групп. Или просто девять целых.

На первый взгляд несколько непривычно. Но, как бы это ни было непривычно, следует научить именно такому пониманию. Во-первых, все это следует из определения дроби. Во-вторых – это гарантирует успешное освоение процентов. Ведь процент – это сотая часть. И не просто сотая часть, а сотая часть группы. Например:

$$\frac{30}{100} = 30/100 = 30\%$$

Знак процента (%) – это знак деления на сто (косая палочка и два нуля). Поэтому 30% от 50 – это не что иное, как тридцать сотых от пятидесяти. Т.е.,

$$\frac{30}{100} \cdot 50 = 15$$

Итак, мы выяснили разницу между «отнять» и «взять».

Но часто бывает достаточно трудно разделить какую-то группу на равные части. Например, если нужно разделить 126 на семь равных частей, то сколько единиц должно быть в каждой части?

Здесь нам опять помогут арифметические действия, которые называются *умножением* и *делением*.

Вспомним, что значит умножить число на число?

Это значит сложить число само с собой столько раз, сколько показывает множитель.

Например, 6 умножить на 3, это значит, сложить шесть три раза. Будет 18. Понятно.

А что значит $\frac{1}{6}$ умножить на $\frac{1}{3}$?

Сложить одну шестую одну третью раза?

А это как?

Вот пусть ребенок подумает.

Давайте еще раз.

Что значит 6 умножить на 3? Это – набрать группу из трех групп по шесть. Получится группа 18. Понятно.

Что значит $\frac{1}{3}$ умножить на 6? Это значит сложить одну третью шесть раз. Получится группа из шести третьих частей.

Три третьи дадут одну целую. Еще три третьи дадут еще одну целую. Итого, получатся две целые группы т.е. «два». Тоже, как будто понятно.

Но что значит 6 умножить на $\frac{1}{3}$?

Наверное, это значит взять группу 6 одну третью раза, т.е. разделить на группы по три. Получатся две группы.

Опять пришли к термину «взять». Следовательно, чтобы взять дробь от числа достаточно эту дробь умножить на это число.

Повторим с первым примером. Как взять три четвертые от двенадцати?

Надо двенадцать разделить на группы по четыре. Получатся три целые группы (по четыре). Теперь три целые группы надо взять три раза (умножить на три) получатся девять целых (групп).

Или группу двенадцать сложить три раза (умножить на три) – получится тридцать шесть. Теперь группу тридцать шесть надо разделить на группы по четыре. Получатся девять групп.

$$12 \cdot \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Как будто понятно.

А как производить деление на дроби?

Например, что значит шесть разделить на одну вторую.

Как мы уже знаем, деление – разложение группы на группы. Самый простой способ – это последовательное вычитание одинаковых групп…

В нашем случае будем последовательно вычитать группу «одна вторая» из группы «шесть» и сосчитаем их. У нас получатся двенадцать групп по одной второй. Ведь в единице две вторые. Следовательно, шесть разделить на одну вторую будет двенадцать. При записи цифрами это можно представить как умножение на перевернутую дробь, т.е.

$$6 : \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{2}{1} = 12.$$

Соответственно, шесть разделить на группы по три четвертые будет… В единице – четыре четвертые. Значит, в шести целых содержатся двадцать четыре четвертых. Разделить их на группы по три… получатся восемь групп, т.е.

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8.$$

А как разделить одну вторую на шесть?

Вспомним полную формулировку: группу «одна вторая» разделить на группы по «шесть». По «шесть» чего? По шесть целых. Но целая группа «шесть» не помещается в группу «одна вторая».

А какая ее часть помещается? «Одна двенадцатая».

Итак, если попытаться разделить группу «одна вторая» на группы по шесть получится двенадцатая часть группы «шесть».

Но каждый раз находить сколько раз какая-то часть группы целых помещается в какую-то часть целого…. Довольно сложно получается.

Выход был найдет. Помог анализ записи действия с помощью цифр. Например,

$$\frac{1}{2} : 6 = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12}$$

Видно, что для получения частного достаточно умножить знаменатель делимого на делитель. Так и поступают. Например,

$$\frac{5}{7} : 6 = \frac{5}{7 \cdot 6} = \frac{5}{42}$$

Теперь решим задачку на проценты.

Цена айфона в магазине была 22 тыс. руб. В магазине провели акцию и объявили скидку в 20%. Какова новая цена айфона?

Цена айфона уменьшилась на 20% от первоначальной. Т.е. на двадцать сотых от 22000 руб.

Вычислим величину скидки.

$$\frac{20}{100} \cdot 22000 = 4400 \text{ (руб.)}$$

Новая цена будет

22000 – 4400 = 17600 (руб.)

Урок 10, на котором появляются десятичные дроби и проценты

Процент – сотая часть чего-либо. Для удобства записи сотую часть стали обозначать символом «%».

Но еще раньше выяснилось, что все дроби со знаменателями 10, 100, 1000 и т.д., удобнее записывать в новом виде, отделяя целую часть от дробной просто запятой. При этом в дробной части не записывается знаменатель, а записывается только числитель.

А как мы узнаем, каким был знаменатель?

Решили, что количество знаков после запятой должно соответствовать количеству нулей в знаменателе.

Например,

$$\frac{25}{100} = 0{,}25; \quad \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad \frac{251}{1000} = 0{,}251; \; 3\frac{9}{10} = 3{,}9;$$

Дробь, записанную в новом виде, назвали десятичной. Выполнять арифметические действия с десятичными дробями гораздо удобнее, чем с обыкновенными.

Например, сложение и вычитание. Здесь, главное, чтобы целая часть десятичной дроби была под целой, а дробная – под дробной, т.е., чтобы запятая всегда была под запятой:

$$\begin{array}{r} 23{,}456 \\ -\ \underline{2{,}231} \\ 21{,}225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}456 \\ +\ \underline{2{,}231} \\ 21{,}225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13{,}45 \\ -\ \underline{0{,}27} \\ 13{,}18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}406 \\ +\ \underline{52{,}03} \\ 52{,}436 \end{array}$$

А как умножать десятичные дроби?

Вначале просто перемножаем числа, не обращая внимания на запятые. В произведении отсчитываем справа налево столько знаков, сколько в обоих мно-

жителях вместе, и ставим запятую. Везде, где не хватает знаков, ставим 0.

Например,

$$\begin{array}{r} \times\ 23{,}4 \\ 3{,}1 \\ \hline +\ 234 \\ 702 \\ \hline 72{,}54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 5{,}34 \\ 0{,}11 \\ \hline +\ 534 \\ 534 \\ \hline 0{,}5874 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 0{,}204 \\ 0{,}3 \\ \hline 0{,}0612 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 0{,}004 \\ 7 \\ \hline 0{,}028 \end{array}$$

И, наконец, деление.

Вначале делим десятичные дроби, не обращая внимания на запятые. В полученном частном отделяем справа налево столько знаков, столько их в делимом после запятой и ставим запятую, потом ее же переносим слева направо на столько знаков, сколько их в делителе после запятой. Везде, где не хватает знаков, ставим 0.

32,7 : 0,03=1090,0; 0,327 : 0,3=1090,0

Эту процедуру можно упростить. Вначале в делителе переносим запятую направо, пока не получится целое число. Потом, на столько же знаков переносим направо запятую в делителе. Потом, после деления, в частном переносим запятую налево на столько знаков, сколько получилось в делимом.

Вычислять дети научатся быстро. Но наша задача на этом этапе, научить детей математическому языку. Пусть ребенок попробует воспроизвести весь приведенный текст. Он знает, что говорить, он знает, как говорить, но сможет ли он свободно говорить?

А как перевести десятичную дробь в обыкновенную?

Очень просто: пишем так, как слышим.

Например, как перевести 0,7 в обыкновенную дробь? Здесь семь десятых. Так и пишем: $\frac{7}{10}$, т.е. 0,7=$\frac{7}{10}$

Еще. 4,13 – это четыре целых тринадцать сотых. Значит, так и пишем: $4\frac{13}{100}$, т.е. 4,13=$4\frac{13}{100}$.

А как перевести обыкновенную дробь в десятичную? Тоже просто. Ведь мы умеем делить десятичные дроби. Значит, надо просто разделить числитель на знаменатель. Например,

$$\frac{3}{4}=3:4=0{,}75 \quad \text{или} \quad 5\frac{7}{8}=5+7:8=5+0{,}875=5{,}875$$

Вычислим значение выражения

$$\frac{3}{8}-6{,}9\cdot\frac{1}{2}$$

1-ый вариант: переведем все дроби в десятичные

$$\frac{3}{8}-6{,}9\cdot\frac{1}{2}=3:8-6{,}9\cdot(1:2)=0{,}375-6{,}9\cdot 0{,}5=$$
$$=0{,}375-3{,}45=-3{,}075$$

2-ой вариант: переведем все дроби в обыкновенные

$$\frac{3}{8}-6{,}9\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}-6\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}-\frac{69}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}-\frac{69}{20}=\frac{15-138}{40}=$$
$$=\frac{-123}{40}=-3\frac{3}{40}.$$

Урок 11, на котором выясняется, что не все можно измерить и появляется формула

Мы научились наблюдать, описывать наблюдаемое, строить определения, давать им имена (термины), измерять, различать группы и считать.

Что дальше?

Не забываем, что каждый следующий шаг должен быть серьезно мотивирован. Ребенок должен понять необходимость следующего шага, иначе он его не сделает.

Вначале, еще немного повторения. Начертим известную уже окружность.

Проведем хорду через центр окружности. Это – *диаметр*.

Соединим точку окружности с ее центром – это *радиус*.

Размеры радиуса и диаметра можно измерить. Пусть ребенок измерит их линейкой. Это легко.

Проделаем то же самое с другой окружностью. Сравним два диаметра. Они различаются по размеру. Тем не менее, это диаметры. Термины совпадают, а размеры отличаются.

Термины не различают размеры.

Обозначим буквой $\boldsymbol{d}$ длину диаметра, а буквой $\boldsymbol{r}$ – длину радиуса. Это – *параметры*.

Для первой окружности длина его диаметра будет $\boldsymbol{d_1}$, а для второй – $\boldsymbol{d_2}$. И так для любого диаметра любой окружности: общее обозначение длины диа-

метра будет сохраняться (***d***), меняться будут только индексы. Напомним, что ***d*** и ***r*** – это параметры.

Параметр – буквенное обозначение величины.

А *величина* – результат счета или измерения.

Теперь обратим внимание на то, что диаметр состоит из двух радиусов. Следовательно, можем записать:

$$d = 2r.$$

Это наша первая формула!

И не надо опасаться, что ребенок еще мал для освоения формул. Дети с третьего класса спокойно оперируют параметрами. Т.е. уже разбираются в алгебре.

Итак, что такое формула?

Формула – это параметрическая запись связи между величинами или просто *связь между параметрами*.

Для чего она нужна?

Формула позволяет производить вычисления.

Что такое вычисление?

Вычисление – это получение значения параметра не измерением, а с помощью численных значений других параметров и связей между ними.

Например, если мы измерили длину радиуса, то нет необходимости измерять длину диаметра. Можно ее вычислить, т.е. получить, умножив длину радиуса на два.

Слишком просто. Зачем вычислять длину диаметра, если и его тоже можно измерить? Измерять даже интереснее…

Так, или примерно так может сказать ваш ребенок.

Вы с этим, конечно же, согласитесь.

В самом деле, можно ли длину хорды измерить линейкой?

Можно.

Можно ли длину диаметра измерить линейкой?

Можно.

Длину радиуса?

Тоже можно.

А можно ли измерить линейкой длину окружности?

Нет!

А что делать?

Обозначим буквой ***c*** длину окружности. Латинской буквой ***c*** – первой буквой в английском слове *circle* – круг, окружность. Итак, линейка – прямая, а окружность – кривая. Линейкой не измерить. А что кроме линейки нужно ребенку, чтобы измерить длину окружности.

Если он догадается сказать, что нитка, то – великолепно.

Можно проложить вдоль окружности нитку, потом ее вытянуть и измерить линейкой. Длина нитки будет равна длине окружности.

Но, во-первых, измерения будут не совсем точными. Во-вторых, не всегда нитка может помочь… Что делать?

Мы знаем, что на длине диаметра помещается два радиуса. А сколько длин диаметров помещается на длине окружности?

У нас есть измеренное с помощью нитки значение длины окружности. Разделим его на измеренное значение диаметра той же окружности. Получится примерно 3. Можно проделать то же самое с окружностями разных размеров: ответ будет один и тот же. В самом деле, на длине *любой* окружности умещается примерно три длины ее же диаметра. Если быть точнее – 3,14 диаметра.

3,14 – знаменитое число. Его назвали **числом π** (пи) в честь Пифагора.

Следовательно, $\mathbf{c = \pi d}$.

Это значит, что достаточно хлопотное измерение длины окружности можно заменить достаточно простым измерением его диаметра и умножением результата на число π (на 3,14). Мы *вычислили* значение длины окружности с помощью *измерения* его диаметра.

Но измерить длину радиуса легче, чем измерить длину диаметра. Чтобы измерить длину диаметра, нужно совместить с линейкой три точки – две точки окружности и его центр, а для измерения длины радиуса – достаточно совместить только две. Но мы знаем, что $d = 2r$.

Следовательно, $\mathbf{c = 2\pi r}$.

Это и будет формула длины окружности.

Формула позволяет вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко.

Попросите ребенка повторить последнее выражение. Обнаружится, что он это не сумеет сделать Добейтесь, чтобы он выучил это выражение наизусть и произносил без запинки. Добиваться, конечно, нужно не принуждением. Все получится само собой. Ведь

ребенок понял, что именно нужно сказать: длину диаметра легко измерит, а длину окружности – нет. Формула позволяет… Он сам будет в некоторой растерянности от того, что у него не получается сказать вслух то, что так легко складывается в голове. Как только он запнется, просто улыбнитесь и попросите повторить еще раз. А еще можно взять секундомер и устроить соревнование: кто быстрее всех и без ошибок повторит все предложение.

Формула не освобождает от необходимости измерять. Но она позволяет заменить трудное или невозможное измерение более простым измерением и вычислением. Формула – верный друг и помощник. Постарайтесь, чтобы и для вашего ребенка она стала другом и помощником, а не пугалом…

Дайте ребенку старый компакт диск и линейку. Пусть выяснит, чему равна дина окружности этого диска. Понаблюдайте за тем, что и как он измеряет. Потом пусть запишет формулу. Потом пусть в формулу вставит измеренное значение длины диаметра. И пусть вычислит длину окружности. У него получится c=37,68 см.

Теперь спросите, измерил ли он длину окружности? Он ответит, что да!

Поправьте его. Он не измерял длину окружности. Он измерил длину диаметра. А длину окружности – он *вычислил*.

Очень важно с самого начало показать различие между измерением и вычислением.

Урок 12, на котором появляются задачи

Как решать школьные задачи?

Да, «примеры» дети решают. Примеры – это термин такой, детский… Что за примеры?, чему примеры? – они не знают, но решают. А вот задачи – это слишком сложно. Задачи дети не любят. Не любят, потому что не понимают, что от них требуют. А мы попробуем понять.

Вначале рассмотрим задачу, где не нужны вычисления, а нужно просто понять, что именно требуется.

«*На сколько этажей нужно подняться на лифте, чтобы оказаться на 7-ом этаже*?»

Дети часто отвечают, что нужно подняться на семь этажей. Но если подняться на семь этажей, то на каком этаже окажемся? Конечно на 8-ом. А нам нужно на 7-ой.

Теперь рассмотрим задачу с простым вычислением.

«*Между этажами девятиэтажного дома по 3 метра. На сколько метров надо поняться на лифте, чтобы оказаться на 6-ом этаже*?»

Мы уже знаем, что подняться надо на 5 этажей, чтобы оказаться на 6-ом. Следовательно, надо подняться на 15 метров.

Еще задачка.

«*В одну лодку помещается 8 человек. Какое минимальное количество лодок нужно, чтобы разместить 43 человек*?»

Ясно, что людей нужно разбить на группы по 8. Для каждой группы – одна лодка. Делим 43 на 8 и получаем 5 групп по 8 и еще остаются 3 человек.

Значит, нужны пять лодок для пяти групп по восемь человек и еще одна лодка для трех человек. Всего нужно 6 лодок.

Возьмем задачку посложнее.

«В одной кассе продали на 30 билетов меньше, чем в другой. По сколько билетов продали в каждой кассе, если всего было продано 480 билетов?»

Умудренный опытом обыватель скажет, что, если касс было две, то нужно поделить пополам общее количество билетов, от одной половины взять 15 и добавить ко второй, т.е.

480:2=240.

240 – 15 = 225 – билетов продано в 1-ой кассе.

240 + 15 = 255 – билетов продано во 2-ой кассе.

Но ребенок расстроен.

– Учительница, – скажет он, – не примет такое решение. Нужно решение по правилам.

Ваши возражения, что главное решить задачу, а каким методом – это не важно, его не утешат.

Что делать? Мы только помним, что это – так называемые «с иксами задачи». Т.е. что-то обозначаем буквой x и составляем «пример», который уже решать умеем…

Давайте попробуем.

Пусть в первой кассе продали x билетов. Тогда во второй – продали на тридцать больше, т.е. $(x+30)$ билетов. Всего было продано 480, что и запишем:

$x+(x+30) = 480$

Решаем «пример», т.е. уравнение:

$2x+30 = 480.$

Вычтем 30 из левой и правой частей.

$$\begin{array}{l} 2x+30 = 480; \\ \underline{\quad -30 \quad -30} \\ 2x + 0 = 450 \end{array}$$

Теперь разделим обе части уравнения на 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{450}{2}$$

$$x = 225$$

225 – это билеты, проданные в 1-ой кассе.

$x+30 = 225+30 = 255$ – это билеты, проданные во 2-ой кассе.

– А мы не умеем вычитать и делить уравнение, – скажет вам ребенок.

Да. В самом деле. В традиционной школьной системе применяют метод переноса переменных из одной части уравнения в другую с соответствующим изменением знаков… Что означает перенос и почему меняется знак, для большинства так и остается загадкой.

Но тут есть еще загадки. Спросите его, а что такое уравнение?

Урок 13, на котором весы помогают решить уравнение

– Что такое уравнение?

– Уравнение – это, где икс!

– А что такое икс?

– Это – неизвестное.

– Значит там, где неизвестное, там уравнение? Понятно. А что значит решить уравнение?

– Значит, найти неизвестное икс.

– Как же мы его найдем, если оно неизвестное?

– Ну, найти, чему равен икс…

– Где будем искать?

– …Вычислить икс!

– Как это сделать? Ведь именно об этом и был вопрос.

Наш ребенок в затруднении. Получается, его учили задом наперед. Учили его решать уравнения, не объяснив, что это такое, откуда они берутся и что значит решить уравнение?

Давайте разберемся.

Мы уже знаем, что такое *параметр* и что такое *формула*.

Величина – результат измерения или счета.

Параметр – буква, обозначающая величину.

Формула – связь между параметрами.

Остается добавить новый термин – *уравнение*.

Уравнение – это связь между формулами, т.е. уравнивание формул!

Решение уравнения или приведение его к более простому виду и есть то, что дети называют «решением примеров».

Наш добрый старый метод позволяет вычислить значение одного параметра с помощью его связей с другими параметрами, т.е. с помощью формулы и или связей между формулами (уравнения).

При вычитании из обеих частей уравнения одинаковых величин, равенство частей сохраняется. При делении обеих частей на одинаковые величины – равенство сохраняется. При сложении, умножении – тоже!

Решить уравнение, значит с помощью последовательных арифметических действий добиться того, чтобы в одной части уравнения остался бы параметр, величина которого неизвестна, а в другой его части – только параметры, величины которых известны.

Проиллюстрировать это можно с помощью старинных весов. Чему равна масса одного яблока, если все три яблока совершенно одинаковы и весы находятся в равновесии? (Рис. 8).

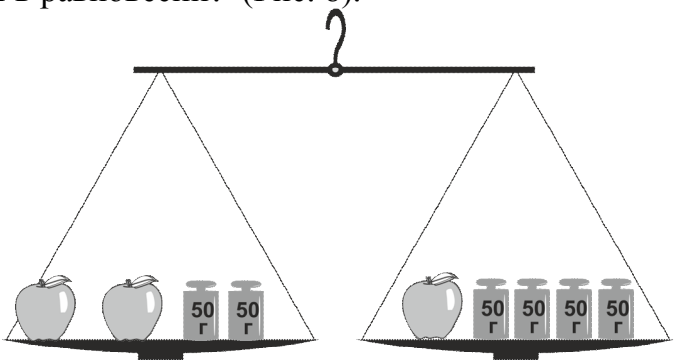


Рис. 8

Здесь масса яблока неизвестна, а масса гири – известна. Как сделать так, чтобы на одной чаше весов осталось только яблоко, а на другой только гири? Пусть ваш ребенок подумает.

Уберем известные грузы, т.е. две гири по 50 г с левой чаши. Равновесие нарушится. Чтобы ее восстановить, надо убрать ровно столько же гирь и с правой чаши. (Рис. 9).

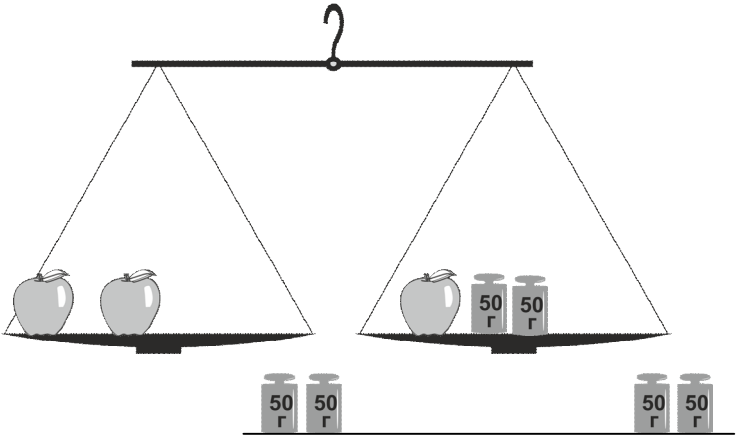


Рис. 9

Теперь надо убрать неизвестный груз с правой чаши, ведь там должны остаться только известные по массе грузы. Снимем яблоко. Равновесие нарушится. Чтобы его восстановить, надо снять яблоко и с левой чаши.

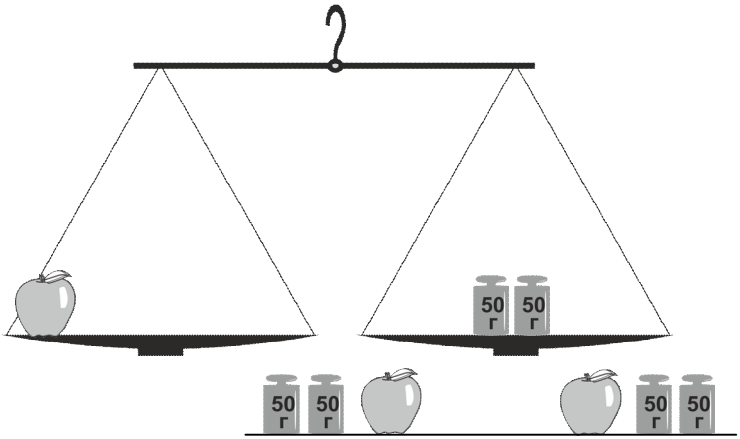


Рис. 10

На левой чаше остался груз неизвестной массы, а на правой – известной. Весы в равновесии. Следовательно, масса яблока равна 50+50=100 (г).

При решении уравнения тоже, в левой части должен остаться наш неизвестный x, а в правой – известное число…

– Это уже лучше, – скажет ребенок. – Но как правильно записать решение задачи?

Здесь уже нужно возмутиться вам. Пусть эту проблему ребенок решает с учительницей, которая и устроила проблему.

Тем не менее, задуматься надо. Ясно, что в требованиях учительницы есть какой-то резон, но какой именно – часто она сама не понимает. Но нам понимать нужно.

Приведенная выше задача относительно простая. И дается она не столько для ее решения, сколько для демонстрации *метода*, которым решают все задачи.

Урок 14, на котором выводим универсальный метод для решения любых задачи

В самом деле, *метод* – это великая сила.

Скажем, что есть метод, которым можно решить любую задачу. Причем, один единственный метод, которым можно решать все задачи и по геометрии, и по математике, и по физике… Ребенок насторожился. Ему нужен этот метод. Но он пока не верит, что такой метод вообще существует. Слишком хорошо, чтобы быть правдой!

Решим предыдущую задачу другим способом. Напомним ее содержание.

«В одной кассе продали на 30 билетов меньше, чем в другой. По сколько билетов продали в каждой кассе, если всего было продано 480 билетов?»

Обозначим параметром *а* – количество билетов, проданных в 1-ой кассе.

Обозначим параметром *в* – количество билетов, проданных во 2-ой кассе

Обозначим параметром *с* – количество билетов, проданных в обеих кассах.

Выпишем в первый столбик все параметры, встречающиеся в задаче: a, b, c.

Во втором столбике запишем связи между этими параметрами, т.е. формулы:

По условию задачи:

$a+b=c$;

$b=(a+30)$

В третий столбик запишем связь между этими формулами – уравнение. Здесь, они связаны с помощью параметра b, т.к. он встречается и в первой, и во второй формулах. Подставим значение параметра b из второй формулы в первую:

$a+(a+30)=c$

Вычислим a:

$$2a+30=c$$
$$\underline{\quad -30} \qquad \underline{\quad -30}$$
$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = \frac{c-30}{2}$$

$a=(c-30):2$

Итак, задача решена параметрически, т.к. в последнем выражении неизвестен только параметр a, который нужно вычислить. Причем теперь совершенно не важно, сколько всего билетов было продано. Сколько бы ни было продано, подставляем их количество вместо параметра c и решаем уравнение:

В нашем случае $c = 480$.

Следовательно,

$a = (480–30):2 = 225$ (билетов);

$в = a+30 = 225 + 30 = 255$ (билетов).

Задачка решена.

Правда, немного смущает слово «параметрически». Надо разъяснить.

Вспомним нашу первую формулу. Это формула для вычисления длины окружности $c=\pi d$. Дайте ребенку старый компакт-диск. Он уже вычислял длину его окружности. Пусть вычислит еще раз. Он измерит диаметр (d=12 см), умножит результат на 3,14 и получит 37,68 см.

Теперь пусть вычислит длину внутренней окружности (ее диаметр равен 4 см). Он и это сделает. Получит 12,56 см.

А теперь пусть он вычислит во сколько раз длина внешней окружности больше длины внутренней.

Ясно, что он разделит 37,68 на 12,56 и получит 3. В три раза больше.

Теперь спросите, сколько измерений и сколько вычислений он проделал? Он проделал два измерения и три вычисления. А можно было сделать всего-навсего одно вычисление… Для этого надо было вначале решить задачу параметрически.

Пусть $c_1 = \pi d_1$ – длина внешней окружности, а $c_2 = \pi d_2$ – длина внутренней. Чтобы вычислить во сколько раз длина внешней окружности больше длины внутренней, надо разделить первую на вторую. Запишем это с помощью параметров.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cancel{\pi} \cdot d_1}{\cancel{\pi} \cdot d_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Это и есть *параметрическое* решение задачи.

В левой части – отношение параметров, которое надо вычислить, а в правой – известные (измеренные) параметры. Только после получения параметрического решения приступают к вычислениям.

В нашем случае, остается только разделить длину диаметра внешней окружности на длину диаметра внутренней.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{12}{4} = 3$$

Ребенок в восхищении! Но он тщательно это скрывает. Да, он получил инструмент. Но универсален

ли он? Годится ли для всех задачек? Рассмотрим еще задачу из 7 кл.

(Старинная задача). *Послан человек из Москвы в Вологду и велено ему проходить в каждый день по 40 верст. На следующий день вслед за ним был послан второй человек. Ему было велено проходить в каждый день по 45 верст. Через сколько дней второй догонит первого?*

Используем тот же метод.

В первую колонку выпишем параметры, т.е. буквенные обозначения всего, что можно измерить или сосчитать:

a_1 – количество дней в пути 1-го гонца

a_2 – количество дней в пути 2-го

b_1 – путь, пройденный 1-ым;

b_2 – путь, пройденный 2-ым;

Во вторую колонку запишем связи между параметрами, т.е. формулы:

$a_1 = a_2 + 1$;

$b_1 = b_2$

$b_1 = 40 \cdot a_1$;

$b_2 = 45 \cdot a_2$

В третью колонку запишем связи между формулами, т.е. уравнение. Связь между последними тремя формулами очевидна:

$40 \cdot a_1 = 45 \cdot a_2$,

но $a_1 = a_2 + 1$.

Следовательно,

$40 \cdot (a_2 + 1) = 45 \cdot a_2$

Получили уравнение, в котором только один неизвестный параметр. Вычислим его.

$40 \cdot a_2 + 40 = 45 \cdot a_2$

$40 \cdot a_2 - 45 \cdot a_2 = -40$

$-5 \cdot a_2 = -40$

$a_2 = 8$ (дней)

Задача решена.

Решена ли? А что значит решить задачу?

В нашем случае, это значит научиться использовать инструмент под названием математика. В самом деле, выполняя какую-либо работу, человек не выполняет ее буквально сам, он использует инструменты. Но инструмент вначале надо изготовить.

Инструмент под названием математика у нас уже есть. А как им пользоваться, т.е., каков метод?

Давайте, рассмотрим решение нашей задачи, опишем, что мы делали и получим определение.

Схематически решение выглядит так:

параметры	формулы	уравнения
a_1 a_2 – ? $в_1$ $в_2$	$a_1 = a_2 + 1$; $в_1 = в_2$; $в_1 = 40 \cdot a_1$; $в_2 = 45 \cdot a_2$	$40 \cdot a_1 = 45 \cdot a_2$; $40 \cdot (a_2 + 1) = 45 \cdot a_2$

вычисления

$40 \cdot a_2 + 40 = 45 \cdot a_2$

$40 \cdot a_2 - 45 \cdot a_2 = -40$

$-5 \cdot a_2 = -40$

$a_2 = 8$ (дней)

На первый взгляд схема непривычна. Но привычка – дело наживное.

Мы *решили* задачу из учебника за 7 класс.

Рассмотрим еще задачу.

Рыбак плыл по течению реки $2\frac{1}{3}$ *часа. На обратный путь он затратил на 28 мин больше. Найти скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 16,5 км/ч.*

параметры	формулы	уравнения
$t_1 = 2\frac{1}{3}$ *ч.*	$S_1 = S_2$	$\upsilon_1\, t_1 = \upsilon_2\, t_2$
$t_2 = ?$	$t_2 = t_1 + 28$ *мин.*	
$\upsilon_л = 16{,}5\,\frac{км}{ч}$	$S_1 = \upsilon_1\, t_1$	$(\upsilon_л + \upsilon_р)t_1 = (\upsilon_л - \upsilon_р)t_2$
$\upsilon_р = ?$	$S_2 = \upsilon_2\, t_2$	
$\upsilon_{л1} = ?$	$\upsilon_{л1} = \upsilon_л + \upsilon_р$	$(\upsilon_л + \upsilon_р)t_1 = (\upsilon_л - \upsilon_р)\,(t_1 + \frac{7}{15}\,ч)$
$\upsilon_{л2} = ?$	$\upsilon_{л2} = \upsilon_л - \upsilon_р$	
$S_1 = ?$	28 *мин.* $= \frac{28}{60}$ *ч*	
$S_2 = ?$	$\frac{28}{60}\,ч = \frac{7}{15}\,ч$	

вычисления

$$(16{,}5\,\frac{км}{ч} + \upsilon_р)\,2\frac{1}{3}\,ч = (16{,}5\,\frac{км}{ч} - \upsilon_р)(\,2\frac{1}{3}\,ч + \frac{7}{15}\,ч)$$

$$(16{,}5 + \upsilon_р)\frac{7}{3} = (16{,}5 - \upsilon_р)\,\frac{14}{5}$$

$$38{,}5 + \frac{7}{3}\,\upsilon_р = 46{,}2 - \frac{14}{5}\,\upsilon_р$$

$$\frac{7}{3}\,\upsilon_р + \frac{14}{5}\,\upsilon_р = 46{,}2 - 38{,}5$$

$$\frac{77}{15}\,\upsilon_р = 7{,}7 \quad => \quad \upsilon_р = 1{,}5\,(\frac{км}{ч})$$

Решение кажется громоздким. Но пусть вас это не смущает. Шаг за шагом мы приучаем ребенка распознавать в тексте задачи *величины*, т.е. все, что можно сосчитать и измерить, обозначать их *параметрами*, отделять их от *коэффициентов*, которые показывают связи между *параметрами*, строить по ним *формулы* и составлять *уравнения*. Это очень важно!

Со временем, ребенок будет делать это быстрее, а записи условия задачи и ее решения будут становиться все короче. Причем, через некоторое время ребенок сам предложит вариант более краткой записи.

Краткость будет достигаться за счет записи только параметров, численные значения которых известны. Все параметры нет необходимости записывать.

То же самое и при решении уравнений. С обретением опыта ребенок будет сокращать запись решения. Но он должен сам дойти до сокращенной записи. Например, краткая запись решения последней задачи:

Дано:	Решение
$t_1 = 2\frac{1}{3}$ *ч.*	$S_1 = (\upsilon_л + \upsilon_р)t_1$
$t_2 = t_1 + \frac{7}{15}$ *ч*	$S_2 = (\upsilon_л - \upsilon_р)t_2$
$\upsilon_л = 16{,}5\ \frac{км}{ч}$	$S_1 = S_2$
	$(\upsilon_л + \upsilon_р)t_1 = (\upsilon_л - \upsilon_р)\ (t_1 + \frac{7}{15})$
$\upsilon_р = ?$	$(16{,}5 + \upsilon_р)\frac{7}{3} = (16{,}5 - \upsilon_р)\ \frac{14}{5}$
	$\frac{77}{15}\upsilon_р = 7{,}7$
	$\upsilon_р = 1{,}5\ (\frac{км}{ч})$

Теперь, чтобы подготовиться к решению более сложных задач, пусть ребенок повторит за вами следующий вопрос: «Если известно, сколько приходится на единицу, то, как вычислить, сколько приходится на какое-то количество единиц?»

После того как ребенок сможет без запинки воспроизвести вопрос, пусть попробует дать ответ. Вы удивитесь тому, как это будет трудно ему сделать.

Ответ должен быть таким: «Чтобы вычислить, сколько приходится на какое-то количество единиц, нужно количество, приходящееся на единицу, умножить на количество единиц».

Теперь обратный вопрос: «Если известно, сколько приходится на какое-то количество единиц, то, как вычислить, сколько приходится на единицу?»

Ответ: «Чтобы вычислить, сколько приходится на единицу, нужно то, что приходится на это количество единиц разделить на количество единиц».

Для чего все это было нужно?

В дальнейшем вы увидите, что решение практически всех школьных задачек по алгебре, физике и химии будут сводиться к ответам на эти два вопроса.

Чтобы добиться понимания смысла вопросов и ответов и свободного их воспроизведения потребуется немало часов. Будьте к этому готовы, не злитесь и не расстраивайтесь, если у детей это не будет получаться сразу. Превратите все в веселую игру.

Теперь посмотрим со стороны, понаблюдаем за тем, как мы решали задачи и построим обобщенное описание.

Текст задачи, записанный на русском языке, мы перевели на язык математики с помощью параметров. Над параметрами произвели соответствующие математические операции и получили результат. Перевели результат из математического языка на русский язык.

Урок 15, в котором появляются числа солнца и луны

Мы научились наблюдать, описывать наблюдаемое, строить определения, давать им имена (термины), измерять, различать группы и считать. Причем считать не только целые группы, но и части их. Если не получается измерить или сосчитать мы научились вычислять по формуле. Формула позволяет вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко. У нас складывается универсальный алгоритм действий. Проверим, будет ли он работать на чем-нибудь другом.

Математическая точка не имеет определения, т.к. она не имеет размера и не может быть наблюдаема, а, значит, ее нельзя описать. Нет описания, значит, нет и определения. Но термин – точка – есть. Это – предельный термин. С его помощью строятся другие определения.

Прямая тоже не наблюдаема, и она тоже не имеет определения. Но можно попытаться описать с помощью термина точка: *прямая* – множество точек расположенных рядом. Хотя, если невозможно представить одну точку, то трудно представить множество точек рядом… Но, что делать, – математика абстрактная наука.

Отрезок – прямая, ограниченная с двух сторон точками.

Прямая, ограниченная с одной стороны точкой, называется *лучом*. Луч имеет начало, но не имеет конца.

Два луча исходящие из одной точки образуют *угол*.

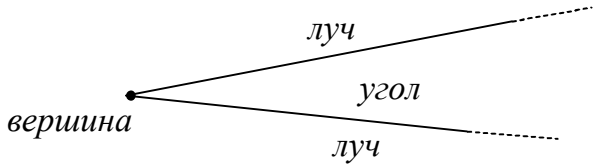


Рис. 11

Точка, из которой исходят два луча – *вершина* угла.

Но углы бывают разного размера. Следовательно, их можно и нужно измерять.

Чем и как?

Измерить – значит, сравнить с эталоном.

Эталон угла – угол в 1 градус.

Угол в 1 градус – угол, образованный двумя радиусами, опирающимися на 1/360-ую часть окружности… Вершина угла, образованного двумя радиусами, совпадает с центром окружности. Поэтому угол, образованный двумя радиусами, будем называть *центральным* углом.

Следовательно, угол в *1 градус – центральный угол, опирающийся на 1/360 часть окружности*.

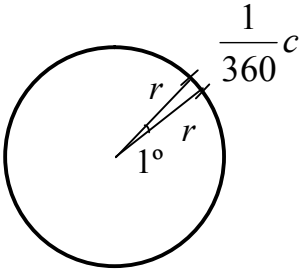


Рис. 12

Пусть теперь ваш ребенок задаст вопрос.

Если он спросит, а почему была взята 1/360-ая часть окружности, а не 1/300-ая или 1/100-ая, то наградите его шоколадкой.

В самом деле, почему одна трехсот шестидесятая часть окружности?

О, это старая история! Она началась еще в Древнем Вавилоне. Это сегодня с числами сладит любой третьеклассник. А в те далекие времена числами умели пользоваться только посвященные. А это обычно монахи в храмах. Одно из главных божеств – Солнце.

Утром солнце на востоке. Вечером на закате. А в полдень? Как называется самая высокая точка, на которую поднимается солнце в течение дня?

Некоторые будут удивлены тем, что эта точка называется зенитом. В полдень солнце в *зените*. Это самая высокая точка. Тогда в полночь солнце опустится на самую нижнюю точку.

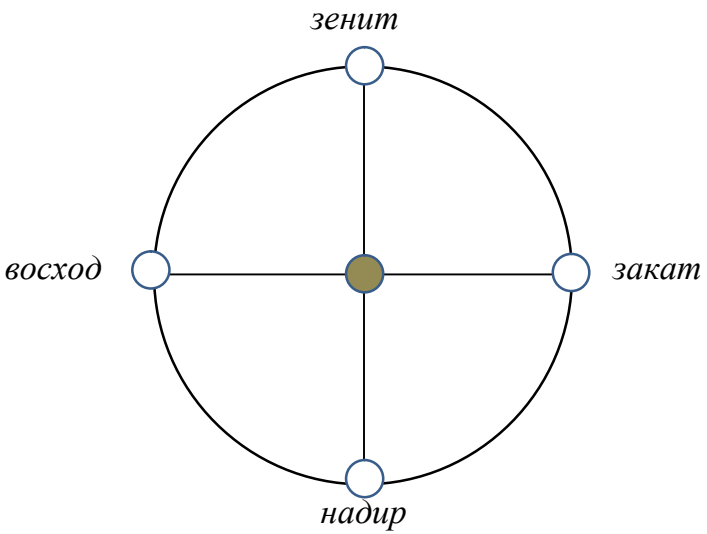


Рис. 13

А как она называется самая нижняя точка?

Она называется *надир*.

Получился древний священный символ солнца (или неба).

Монахи решили ответить на вопрос, сколько дисков солнца помещается на дневном его пути.

Спросите ребенка, а можно ли измерить видимый диаметр солнца? Скорее всего, он ответит, что нет. А видел ли он солнечное затмение, а если видел, то как он его наблюдал? Наверное, сквозь затемненное стекло. Так можно ли на темном стекле измерить диаметр светлого диска солнца? Можно.

Это и есть *видимый* (не действительный) диаметр солнца. Если разделить дневной путь солнца на его видимый диаметр, получим количество солнц, умещающихся на… Но, измерить видимый путь солнца невозможно!

Пойдем другим путем. За какое в среднем время проходит солнце свой дневной путь?

Верно, за 12 часов.

Если бы мы знали, за какое время солнце проходит путь, равный собственному диаметру, мы могли бы разделить 12 часов на это время и получили бы количество солнц…

Но как измерить время, за которое солнце проходит по небу расстояние, равное собственному диаметру? Пусть ребенок подумает.

Тем, кто живет у моря, проще. Можно рано утром, когда еще не взошло солнце, выйти на пляж. Телефоны сегодня есть у всех, а в нем секундомер. Включаем секундомер, когда на горизонте из воды появится макушка солнца, и выключаем его, когда

солнце полностью выйдет из воды. Сколько получилось? Две минуты! Ребенок будет удивлен.

Разделим 12 часов на две минуты.

Конечно, прежде переведем 12 часов в минуты.

Это составит 720 минут.

Разделим их на две минуты и получим 360 солнц!

Триста шестьдесят – это великое магическое число солнца. Оно делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 8, на 9, на 10.

Не делится оно только на 7.

А почему?

В древности считали, что число 360 не делится на число 7, потому что 360 – число солнца, а 7 – число луны… А луна и солнце вечно враждуют.

Но почему число 7 – число луны?

А почему в неделе семь дней, а не восемь?

Может, неделя тоже связана с луной?

Ребенок уже крайне заинтересован получить ответы.

Луна вращается вокруг земли. Она делает один оборот за… месяц. За 28 дней.

При этом, видим мы луну, потому что ее освещает солнце.

Так как на луне нет атмосферы, то граница освещенной и неосвещенной частей очень четкая. В процессе движения вокруг земли форма освещенной части меняется. Это и используется для измерения времени.

Начнем наблюдение с момента, когда в ночном небе ярко светит круглая (полная) луна. Это полнолуние. (Рис. 14).

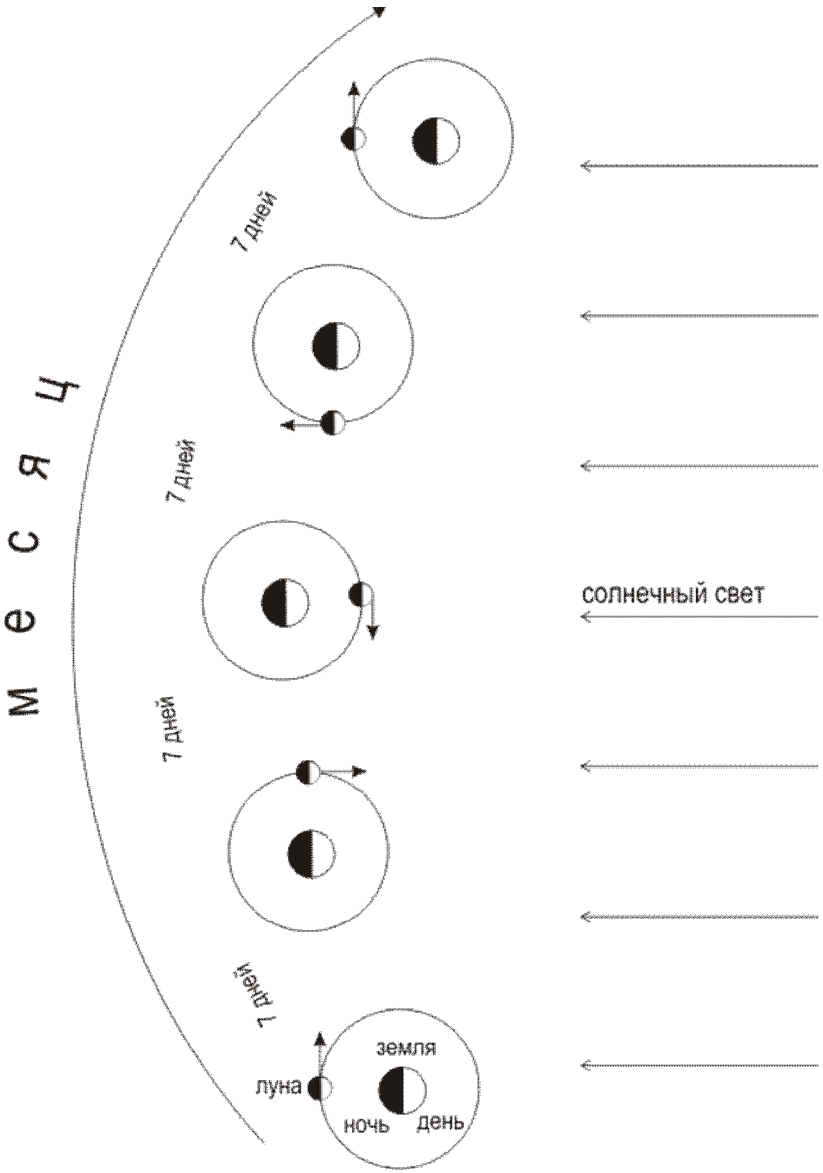

М е с я ц
7 дней
7 дней
7 дней
1 дней
луна
земля
ночь
день
солнечный свет

Рис. 14

Через несколько ночей мы заметим, что форма диска луны стала меняться. Она превратится вначале в полумесяц, потом в серп… А потом и вовсе исчезнет. Наступает новолуние. Потом опять появится серп луны, он начинает расширяться, превращается в полумесяц и далее опять становится круглым.

Между полнолуниями – один месяц. А между вполне различимыми полнолунием, полумесяцем, новолунием, полумесяцем и полнолунием по семь дней.

Вот почему число 7 – число луны. И вот почему в неделе семь дней.

Четко различимые формы луны называют фазами луны. Время, за которое Земля делает один оборот вокруг Солнца, назывался большой круг (1 год). Большой круг делился на двенадцать частей. На 12, потому что 12 – наименьшее число, которое делится на один, на два, на три и на четыре, т.е. на максимальное количество чисел входящих в пятерку – число пальцев на одной руке.

И потом, 12 – наибольшее количество, которое можно сосчитать на пальцах одной руки. А как это?

Попросите вашего ребенка сосчитать на пальцах одной руки до 5-ти. Это просто.

А теперь, пусть посчитает до 12-ти. Скажите, что вы видели, как считала бабушка: большим пальцем сосчитайте фаланги на других четырех пальцах. Их ровно 12. Это – *дюжина*.

Двенадцать остановок делает Солнце на двенадцати знаках зодиака пока проходит большой круг. Двенадцатая часть большого круга становится месяцем для года. Ровно 360 дисков солнца помещается на дневном его пути и 360 двойных солнц на всем суточ-

ном пути, что образует малый круг. Разделив малый круг, как и большой, на 12, получим 30 двойных солнц, что будут «месяцем» для дня. Разделив этот «месяц» на 30, получим одну двойную минуту – время, за которое солнце проходит путь, равный своему поперечнику. А два луча, опирающиеся на одно двойное солнце, дадут ровно 1 градус – меру измерения угла – и их на всем малом круге 360. А 360 – это великое магическое число, которое наименьшее из тех, что делятся на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 8, на 9 и на 10, т.е. на максимальное количество чисел входящих в десятку – число пальцев на двух руках.

Не делится 360 только на число луны, на непослушное число 7, которое получило свое имя от бога Сета, который убил своего брата Осириса и, расчленив его тело на 72 части, разбросал их по свету. А если разделить 360 на 72, получится 5. Ведь ровно столько надо прибавить к 360, чтобы получилось 365 – число дней в солнечном году, потому что ровно год безутешная Изида, жена Осириса, собирала останки своего мужа…[1]

Хотя, я думаю, объяснение гораздо проще. Деление чего-либо на 12 дает количество долей, которые группируются по 1, по 2, по 3 и по 4 – максимальное количество групп в пятерке (пальцы на одной руке).

Деление чего-либо на 360 долей позволяет группировать доли по 1, по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, по 8, по 9 и по 10 – максимальное количество групп в десятке (пальцы на двух руках).

Сегодня – это просто. Но когда-то…

---

[1] Томас Манн. Иосиф и его братья.

* * *

Двенадцать часов – день, двенадцать – ночь. 12 двойных часов – сутки. В часе – 60 минут. В минуте – 60 секунд. Итого, в часе – 3600 секунд. Обыкновенные часы продолжают рассказывать нам эту древнюю историю. Научите вашего ребенка слушать эту магию чисел. Пусть соединит он в сердце своем время настоящее и время древнее. Только так найдет он себя, и не будет он просто песчинкой, которую без цели гонит ветер. Только так вы сможете сказать, что он – это вы, и он продолжит время и продолжит жизнь.

Урок 16, на котором радианы спорят с градусами

Рассказ. В прошлый раз вы рассказали детям историю о числе 360, солнце и луне, годе и месяце, Осирисе и Сете…

Рассказ – описание события, которое вы наблюдали. Мы уже знаем, что в прямом угле 90 градусов. А угол в один градус – центральный угол, опирающийся на 1/360-ую часть окружности. Центральный угол – угол образованный двумя радиусами…

Угол, который меньше прямого, называется *острым*.

Угол, который больше прямого – *тупым*.

Если два луча угла образуют прямую линию, т.е. угол равен 180 градусам, то такой угол называется *развернутым*.

Теперь мы можем измерять углы. Инструмент для измерения угла – *транспортир*.

Пусть ваш ребенок попробует изготовить транспортир самостоятельно. Это не так сложно. Надо вырезать полукруг, основанием которого будет, конечно, диаметр. Чтобы измерить угол, надо совместить центр круга (точку в середине диаметра) с вершиной угла и расположить полуокружность так, чтобы его диаметр совпал с одним из лучей. Другой луч покажет на полуокружности количество градусов… Правда, вначале надо отметить эти градусы.

Как отметить градусы на полуокружности?

Половина окружности содержит 180°.

Маленький кружочек – знак градуса. Это маленькое солнце. О связи с солнцем мы говорили в прошлый раз. Половина полуокружности – 90°. Разделим 90° на три части – по 30°. Каждые 30° тоже на три – получим по 10°. Их пополам – это будет по 5° и т.д. Эта процедура называется калибровкой. Полученный инструмент – *транспортир*.

Итак, мы можем измерять углы, сравнивая их с эталоном, с углом в один градус (1°), который есть центральный угол, опирающийся на 1/360 часть окружности, а центральным называется угол, образованный двумя радиусами, а радиус – отрезок, соединяющий точку окружности с его центром, а инструмент для измерения угла – транспортир, а...

Может показаться несколько занудным, постоянное повторение одного и того же. Но так может показаться только взрослым, которым уже трудно учиться. А детям наоборот, это очень интересно… и важно. Почему важно? Да потому что им, наконец, есть что сказать, и они могут это сделать! У них получается связанная речь, рассказ. Причем рассказ сам помогает себя продолжать.

Каждое новое слово (термин) позволяет повторить все, что было раньше. Это как в сказке про репку: появляется новый персонаж и надо повторить все, что было прежде: Жучка за внучку, внучка за бабку, бабка за дедку… Здесь и повторение, и закрепление, и логика, и закономерность.

Мы описали углы, измерили их, но у нас пока нет формулы.

Пусть требуется описать длину дуги, на которую опираются два радиуса. (Рис. 15).

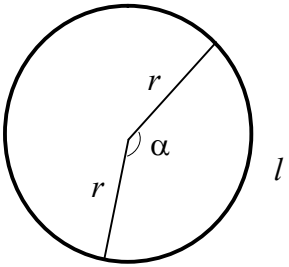


Рис. 15

Угол α можно измерить транспортиром. Длину радиуса *r* можно измерить линейкой. Длину дуги *l* линейкой не измерить. Попробуем ее вычислить.

– На какую часть длины окружности опирается угол в 1 градус?

– На одну трехсот шестидесятую часть.

– А угол в 2 градуса?

– На две трехсот шестидесятые части.

– А угол в 7 градусов?

– На семь трехсот шестидесятых частей.

– А угол в α градусов?

– На α трехсот шестидесятые части.

– Попробуй это записать, если часть окружности это и есть дуга, на которую опирается угол α.

Должно получиться:

$$l = \alpha \cdot \frac{1}{360} \cdot c$$

Здесь, угол можно измерить транспортиром. А длину окружности не измерить линейкой. Но мы можем вычислить длину окружности по формуле $c=2\pi r$.

Следовательно,

$$l = \alpha \cdot \frac{1}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\alpha \pi r}{180}.$$

Мы получили формулу для вычисления длины дуги, на которую опирается центральный угол.

Градусная мера хороша для измерений… Но она неудобна для вычислений. Формулы получаются довольно громоздкими. Поэтому была введена другая единица измерения угла. Это – угол в 1 радиан (1 *рад.*).

Угол в 1 радиан образуют два радиуса (r), опирающиеся на дугу окружности (l), равную длине радиуса.

Следовательно, *угол в 1 радиан – центральный угол, опирающийся на дугу окружности, равную длине радиуса.*

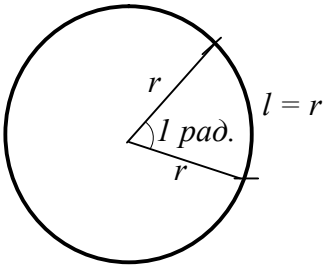


Рис. 16

Если мы разделим длину окружности на длину радиуса, получим количество *радиан* в окружности, т.к. на каждую дугу, равную радиусу, опирается угол в один радиан.

Вспомнив формулу длины окружности ($c=2\pi r$), получим:

$$\frac{c}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

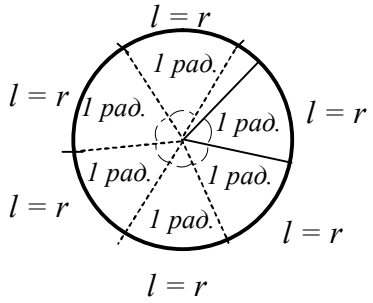


Рис. 17

Итак, количество углов в 1 радиан, умещающихся в окружности, равно *2π* или 6,28. Ведь мы помним, что число π – это количество диаметров, умещающихся на длине окружности, и оно равно 3,14.

Но в окружности 360 градусов.

Следовательно, 2π *рад*. = 360°.

Соответственно, в 1 градусе будет 2π/360 радиан или, после сокращения,

1° = π /180 *рад.*

Можно было бы везде вместо π написать 3,14 и получить конкретные числа, но в большинстве случаев получилась бы дробь, достаточно неудобная в обращении. Например, 30° = π/6 *рад.* =3,14/6 *рад.* = 0,523333… *рад.*

Если учесть, что и само число π равно 3,14 только округленно, а на самом деле это число 3,1415926… и далее бесконечный ряд чисел, то лучше оставить в радианной мере угла только π. К тому, что π/4 *рад.* – это 45°, легко привыкнуть.

В дальнейшем, размерность *рад.* (радиан) для углов, выраженных в радианах кратных числу π, не

пишется. Будем писать и говорить, что угол равен, например, пи-пополам ($\pi/2$) или пи-на-шесть ($\pi/6$), подразумевая, что это, конечно, радианы.

Длина дуги, на которую опирается угол в 1 радиан, равна длине радиуса (r). Следовательно, длина дуги (l), на которую будет опираться угол в 2 радиана, будет в 2 раз больше, 3 радиана в 3 раза больше, а в φ радиан в φ раз больше, т.е. получаем формулу для вычисления длины дуги, на которую опирается некоторый центральный угол.

$$l = \varphi \cdot r$$

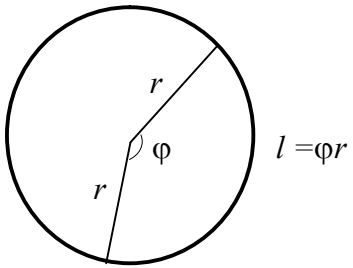


Рис. 18

Следовательно, длина дуги, на которую опирается центральный угол в π *рад.*, будет $l = \pi r$.

Здесь, длину радиуса можно измерить линейкой. Угол можно измерить транспортиром в градусах и перевести в радианы просто умножив количество градусов на $\pi/180°$. Произведение длины радиуса и величины угла даст длину дуги, на которую опирается этот угол. Измерить линейкой длину этой дуги трудно. Мы ее вычислили. Формула опять помогла нам вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко!

Урок 17, на котором появляется первая теорема

Продолжим знакомство с углами.

Противолежащие углы, образованные пересекающимися прямыми, называются *вертикальными углами.*

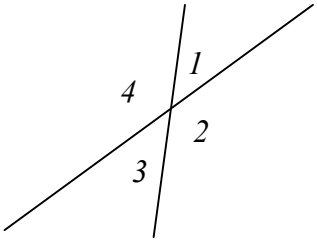


Рис. 19

Углы 1 и 3 – вертикальные. Углы 2 и 4 – тоже вертикальные.

Вертикальные углы равны.

Углы, у которых один общий луч, а два других луча образуют прямую линию, называются *смежными* углами.

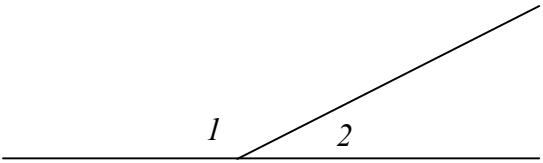


Рис. 20

Углы 1 и 2 – смежные.

Сумма смежных углов равна 180°.

Параллельными прямыми называются непересекающиеся прямые, лежащие на одной плоскости.

Прямая, пересекающая параллельные прямые, называется *секущей*.

Две параллельные прямые и секущая образуют восемь углов. Рассмотрим их.

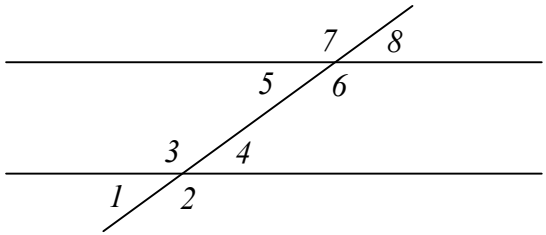


Рис. 21

Пусть ребенок покажет на рисунке смежные и вертикальные углы.

Здесь, 3, 4, 5 и 6 – *внутренние углы*. Они расположены внутри (между) параллельных прямых.

Углы 3 и 6 – *внутренние накрест лежащие углы*. Они расположены внутри параллельных прямых крест накрест от секущей. Внутренние накрест лежащие углы равны.

Углы 4 и 5 – тоже внутренние накрест лежащие углы.

Углы 4 и 8 – *соответствующие углы*. Соответствующие углы равны.

Теперь можно сформулировать и доказать первую теорему.

Теорема Фалеса.

Теорема Фалеса гласит: *если параллельные прямые делят луч угла на равные отрезки, то они делят и другой его луч на равные отрезки.*

Сделаем чертеж. Продемонстрируем, что и здесь выполняется обще правило: я наблюдаю, описываю то, что наблюдаю…

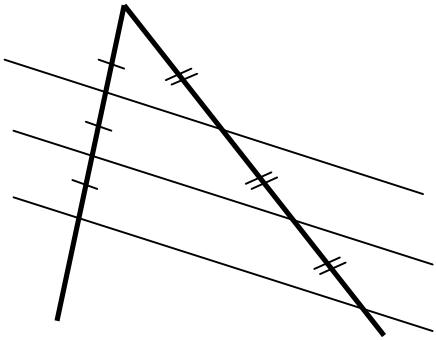


Рис. 22

Добейтесь того, чтобы ребенок повторил условие теоремы, демонстрируя каждый ее пункт на чертеже. Вот параллельные прямые, вот они делят один луч угла на равные отрезки, вот они делят и второй луч угла на равные отрезки… На равные ли? Надо доказать.

Далее будет важный момент. Ребенок должен научиться пользоваться языком математики, а для этого нужна практика языка. Поставьте точку (А) так, как это указано на рис. 23.

Пусть ребенок опишет положение этой точки. Для него это будет неразрешимая задача. Не томите его долго и опишите сами: это *точка пересечения одной из параллельных прямых и второго луча угла*. Добейтесь, чтобы он повторил эту фразу несколько раз.

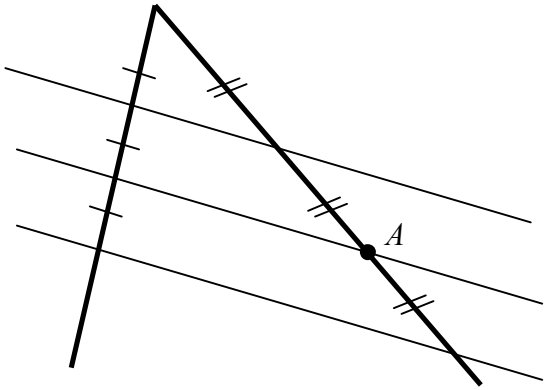


Рис. 23

Теперь можно привести текст доказательства.

Чтобы доказать теорему Фалеса, надо через точку пересечения одной из параллельных прямых и второго луча угла провести прямую, параллельную первому лучу.

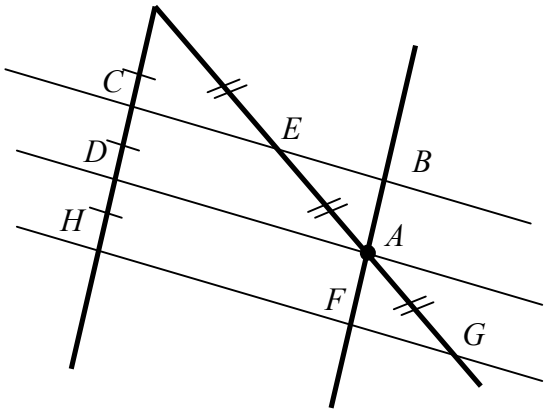


Рис. 24

Получим два треугольника AEB и AFG. Если мы докажем, что эти треугольники равны, то это будет обозначать, что отрезки EA и AG тоже равны. А это и есть то, что нужно доказать.

Сравним углы в этих треугольниках. Пусть ребенок укажет вертикальные и внутренние накрест лежащие углы. Помогите ему правильно указать параллельные прямые и секущую.

Выяснится, что все три угла первого треугольника равны всем углам второго. Достаточно ли это, чтобы признать треугольники равными? Ребенок решительно заявит, что достаточно.

На самом деле, конечно, нет.

Начертите треугольник и проведите прямую, пресекающую боковые его стороны параллельно основанию.

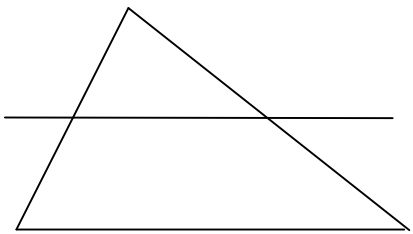


Рис. 25

Получим два треугольника: большой и маленький. Все три угла первого треугольника равны соответственно трем углам второго… Но сами треугольники не равны.

Для равенства треугольников необходимо еще, чтобы хотя бы одна сторона одного треугольника была равна стороне другого треугольника.

Рассмотрим четырехугольник ABCD на рис. 24.

Стороны AB и CD параллельны по построению. А стороны BC и DA параллельны по условию теоремы. Следовательно, четырехугольник ABCD – параллелограмм.

У параллелограмма противоположные стороны не только параллельны, но и равны. Следовательно, отрезок AB равен отрезку CD.

Но CD равен DH, по условию теоремы. В свою очередь DH равен AF, т.к. четырехугольник ADHF тоже параллелограмм. Но это означает, что отрезок AB равен отрезку AF. А это означает что треугольники AEB и AFG равны.

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

Углы EBA и AFG равны как внутренние накрест лежащие. Следовательно, лежащие напротив отрезки EA и AG равны.

Теорема доказана.

* * *

Пусть многое ребенку еще не известно, пусть он не помнит все признаки равенства треугольников и не может доказать, что противоположные стороны параллелограмма равны по величине. Это неважно. Важно то, что есть достаточно длинный и понятный текст на математическом языке, который он может воспроизвести. И ребенок постепенно привыкает к новому языку, начинает его чувствовать.

Урок 18, на котором теорема помогает перестраивать крышу

Что дает теорема Фалеса? Где ее можно применить?

Дадим ребенку задание. Пусть у нас строится загородный дом. Чердак получился очень высоким. Решили и на чердаке сделать комнату. Нужно для начала соединить балкой середины левого и правого скатов крыши. Это задание вы даете ребенку. Пусть он опишет последовательность своих действий.

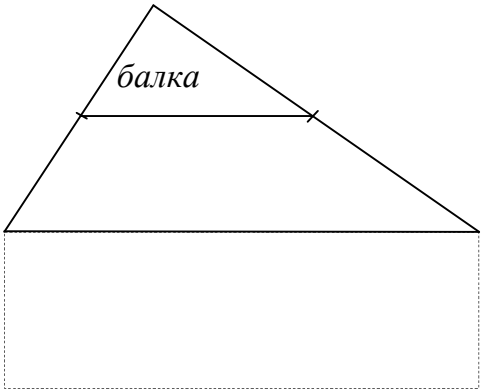


Рис. 26

После нескольких попыток получится примерно следующее... По крайней мере, добейтесь, чтобы текст получился примерно следующим.

«Я прикладываю лестницу. Забираюсь на крышу, на самый конек. Опускаю вдоль левого ската крыши рулетку и измеряю ее длину. Делю длину пополам. С риском для жизни спускаюсь и отмечаю положение середины ската. Потом, то же самое проделываю с

правой стороны. Потом спускаюсь вниз. Забираюсь по лестнице на чердак. Нахожу свои отметки и измеряю рулеткой расстояние между ними. Потом спускаюсь во двор. Нахожу балку. Отпиливаю нужную длину. Поднимаю ее на чердак и прибиваю…»

Теперь скажите, что теорема Фалеса поможет избавиться от самой опасной части работы. Нет необходимости подниматься с риском для жизни на крышу.

Рассмотрим еще раз наш рисунок. Крыша напоминает чертеж к теореме Фалеса. Только в нашем случае, два горизонтальных отрезка (AB и CD) делят левый луч угла и правый луч на равные отрезки. Следовательно, по теореме Фалеса эти два отрезка параллельны.

Через середину правой стороны треугольника OCD проведем прямую, параллельную левой его стороне.

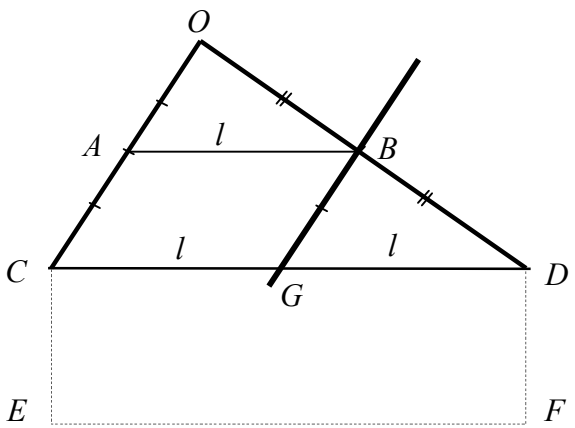


Рис. 27

Четырехугольник ABGC – параллелограмм, т.к. сторона AC параллельна стороне BG по построению, а

сторона AB параллельна стороне CG по тереме Фалеса. Следовательно, длина отрезка AB равна длине отрезка CG. Отлично!

Теперь рассмотрим два треугольника OAB и BGD.

Отрезки OB и BD равны по условию задания.

Отрезок BG равен отрезку AC, который в свою очередь, равен отрезку OA (по условию задания).

Угол AOB равен углу GBD (соответствующие углы). Две стороны и угол между ними одного треугольника, равны двум сторонам и углу между другого треугольника. Следовательно, эти треугольник равны.

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Значит, отрезок AB равен отрезку GD.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон треугольника, называется *средней линией треугольника.*

Получили теорему о средней линии треугольника.

Средняя линия треугольника параллельна основанию треугольника и равна его половине.

Т.е. $AB = \frac{CD}{2}$.

Чтобы вычислить длину средней линии треугольника достаточно измерить его основание… и разделить его длину на два.

Значит, для выполнения нашего задания было достаточно измерить длину EF прямо по земле. Разделить ее на два. Отпилить балку этой длины. Поднять ее на чердак и параллельно полу поднять ее до каса-

ния с крышей и прибить. Балка соединит середины скатов крыши…

Отлично!

Теперь разберемся со средней линией трапеции.

Начертим трапецию (ABCD). Построим в ней отрезок, соединяющий середины боковых сторон – это будет средняя линия трапеции (EF). И подумаем, можно ли вычислить ее длину, измерив только основания трапеции (AD и BC)?

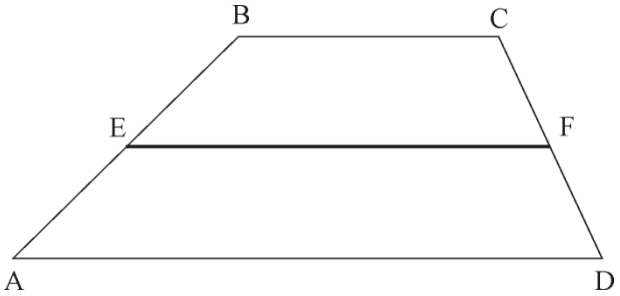


Рис. 28

Вначале покажется, что ничего нельзя придумать. Но, вспомним, что часто сложная задачка решается разложением ее на более простые задачки. Мы умеем вычислять длину средней линии треугольника. А нельзя ли нашу задачку тоже свести к треугольнику со средней линией? Можно.

Проведем отрезок из левой вершины через середину правой стороны трапеции до пересечения с продолжением ее основания.

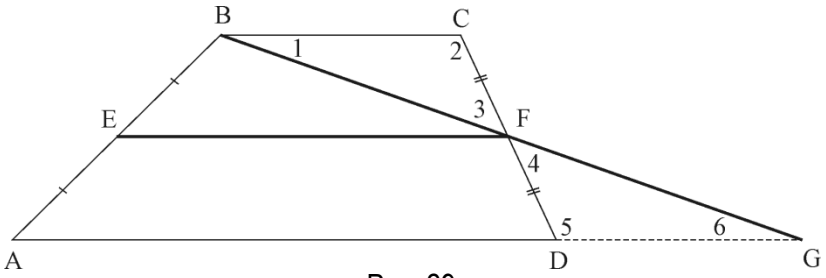


Рис. 29

Получим большой треугольник ABG и два маленьких треугольника BCF и FDG.

Докажем, что треугольники BCF и FDG равны.

Здесь, углы 3 и 4 – равны, как вертикальные.

Углы 1 и 6 – равны, как внутренние накрест лежащие. Углы 2 и 5 – тоже.

Сторона CF равна стороне FD, по условию.

Следовательно, треугольники BCF и FDG равны.

Это значит, что отрезки BF и FG тоже равны.

Теперь рассмотрим большой треугольник ABG. В нем отрезок EF соединяет середины боковых сторон треугольника, т.е. это – средняя линия треугольника. Она параллельна основанию и ее длина, как мы выше доказали, равна половине длины основания.

Т.е. $EF = \dfrac{AG}{2}$.

Но AG = AD+DG, а DG=BC.

Следовательно,

$$EF = \frac{AD + BC}{2}$$

Таким образом, *длина средней линии трапеции равна полусумме длин ее оснований*. Что и требовалось доказать.

Урок 19, на котором площадь находит свою площадь

Продолжим упражняться в описании и знакомиться с формулами, с этими великими помощниками. Но прежде напомним, для чего мы учим уроки.

Сами эти уроки о радиусах и формулах нам, может быть, и не нужны… Нам нужны способности, которые с помощью этих уроков вырабатываются. К примеру, если вы купили сыну гантели, это вовсе не значит, что ему нужны именно гантели. Скорее, ему нужно физическое развитие, которое можно с их помощью получить.

Если ваш ребенок не может описать то, что можно непосредственно наблюдать, то тем более он не сможет описать то, что наблюдать непосредственно трудно или невозможно. Как он опишет мысли, чувства, переживания?… Как он опишет, что у него на душе, если он не может описать восход солнца, летний дождь или радиус с диаметром?

Продолжим изучать простое в надежде на то, что оно поможет понять и освоить сложное.

Ребенок все еще под впечатлением того, как формула помогла вычислить длину окружности и длину дуги, на которую опирается центральный угол. Закрепим это впечатление.

Покажем еще один пример – измерение и вычисление площади.

А что такое площадь?

Для точек и линий начерченных на доске, множество точек расположенных рядом – *прямая линия*…

Множество параллельных линий – *плоскость*.

Часть плоскости, ограниченная замкнутой кривой – *площадь*.

Площадь для плоскости – то же, что отрезок для прямой.

Измерить – значит, сравнить с эталоном.

Следовательно, измерить площадь – значит, сравнить ее с эталоном площади.

А что у нас в качестве эталона площади?

Конечно, площадь квадрата со стороной равной 1 метру – один квадратный метр.

Спросите у ребенка, как велика классная комната в его школе? Он может сказать, что как три или четыре его комнаты… А точнее?

Необходимо сравнение с чем-то, что известно всем. Это что-то и есть площадь квадрата со стороной 1 метр. Ведь все знают, что такое один метр и поэтому смогут представить квадрат со стороной, равной одному метру.

Но ваш ребенок не так прост. А вдруг он спросит, что такое квадрат?

– Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны, – ответите вы.

– А что такое прямоугольник? Ведь мы его еще не проходили!

Прямоугольник – четырехугольник, все углы которого прямые.

Прямоугольник, все стороны которого равны – *квадрат*.

Квадрат, сторона которого равна 1 метру – *эталон* измерения площади.

Измерить площадь – значит, сравнить ее с эталоном площади.

Ясно, что выпилить из фанеры квадратный метр и пойти с ним в школу, чтобы измерить площадь классной комнаты, несколько неудобно. Что делать?

Надо измерение заменить вычислением.

Пусть нам нужно измерить площадь прямоугольника, начерченного на листе бумаги. Т.к. площадь невелика, то пусть единицей измерения (эталоном) будет квадрат со стороной не 1 метр, а 1 сантиметр. Чтобы измерить площадь, надо изготовить эталон, т.е. вырезать квадратик со стороной 1 см, и сравнить с ним искомую площадь. Но это, как уже говорилось, довольно неудобно.

Если измерить линейкой длину одной стороны прямоугольника в сантиметрах, то мы узнаем, сколько квадратных сантиметров размещается вдоль этой стороны.

Точно так же, измерив в сантиметрах длину другой стороны прямоугольника, образующей с первой прямой угол, получим количество квадратиков, помещающихся вдоль нее.

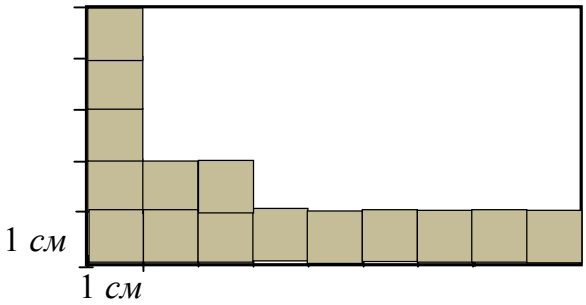


Рис. 30

На рисунке видно, что получается девять столбиков по пять квадратов в каждом, т.е. всего 45 квадратиков.

Общее количество квадратиков равно произведению длин сторон образующих прямой угол.

Мы избавились от необходимости измерять площадь. Мы ее вычислили. Запишем формулу для вычисления площади прямоугольника.

$$S = a \cdot b,$$

где параметр S – площадь прямоугольника, параметр a – его длина и параметр b – ширина.

Буква S взята для обозначения размера площади тоже не случайно. По-английски *square* – квадрат. Отсюда S – количество квадратов.

Мы не освободились от необходимости вообще измерять. Но мы заменили довольно хлопотное измерение площади прямоугольника достаточно простым измерением его длины и ширины.

Точно так же и в жизни, овладение новыми технологиями позволяет с минимумом затрат решать довольно сложные житейские проблемы. Но это для тех, кто разумеет, и кто смог овладеть технологиями измерения и вычисления хотя бы на уровне 3-го класса.

Урок 20, на котором выводим формулу из формулы

Отчаянье. Наверное, этим словом можно выразить состояние некоторых моих читателей. Они чувствуют, что все понимают, но так же понимают, что ничего повторить или запомнить не смогут. Все эти площади, квадраты, радиусы, числа *пи* и формулы приводят… да, да – в отчаянье. То же чувствуют и дети.

– Никогда, никогда я этого не смогу! – восклицают они иногда.

Смогут. Все смогут. Не надо только впадать в отчаянье.

Прежде всего, напомним, что может так случиться, что никому из вас не придется вычислять площадь прямоугольника. Но мы уже говорили, что нам нужны не сами вычисления, а развитие наших способностей. Нам нужно научиться мыслить. Ошибаются те, кто считают умение мыслить врожденным качеством человек. Врожденным является только способность научиться мыслить.

Думай! Как часто мы произносим это слово, обращаясь к ребенку.

Думай! Очень интересно… я бы подумал, если бы знал, как это делается.

Будем продолжать учиться думать на простых моделях.

Сравнив размер прямоугольника с размером квадратика со стороной 1 см, мы можем описать размер площади прямоугольника, т.е. *измерить* ее.

Перемножив длины сторон, образующих прямой угол, измеренные линейкой в сантиметрах, мы можем *вычислить* площадь прямоугольника.

Но попробуйте, имея в руках только линейку, вычислить или измерить площадь круга.

Круг – плоскость, ограниченная окружностью.

Окружность… Ни одного прямого отрезка! Что измерять? Как вычислять?

Для начала, возьмем задачку попроще: вычислим площадь треугольника. Измерить ее практически невозможно. Не уместятся квадратики в треугольнике. А как вычислить? Какие измерить параметры и в какую формулу подставить?

Можно, конечно, иметь под рукой шпаргалку со всеми формулами, куда можно подставить данные и сделать вид, что экзамен сдан.

Но, во-первых, где взять данные и, во-вторых, для чего делать вид? Ясно, что в большинстве школ все еще работает 2-й закон социализма: важна не работа, а отчет о проделанной работе. Но вам-то это зачем и кому вы собираетесь сдавать отчет?

Попробуем самостоятельно найти данные и самостоятельно выведем нужные формулы. Это умение у вас никто не отнимет, и оно поможет вам самостоятельно составлять формулы для решения более запутанных житейских задачек.

Проведем диагональ в прямоугольнике. Диагональ – отрезок, соединяющий противоположные углы прямоугольника. Получим два треугольника. Они совершенно одинаковые, равные. Их площади равны друг другу. Следовательно, площадь одного треугольника равна половине площади всего прямоугольника.

А формула площади прямоугольника нам уже известна: $S = ab$.

Значит, $S_{\Delta} = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

Таким образом, для вычисления площади треугольника, необходимо измерить длины двух его сторон, составляющие прямой угол, и их произведение разделить на два…

Обратите внимание: полученное решение оказалось достаточно простым. Но простым оно кажется, когда уже получено. Точно также, вновь появившаяся проблема, кажется вначале трудноразрешимой, но в конце – все оказывается достаточно просто. Надо научиться не бояться и смело действовать. Действовать, даже не совсем представляя, куда это действие приведет.

Продолжим.

Что делать, если треугольник не прямоугольный?

Нижняя сторона треугольника, называется *основанием*. Обозначим ее длину параметром a.

Проведем отрезок прямой от вершины треугольника к его основанию так, чтобы между этим отрезком и основанием получился прямой угол.

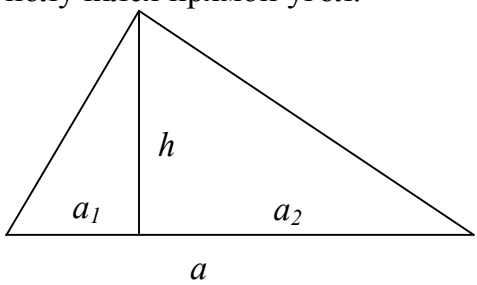


Рис. 31

Говорят, опустим *перпендикуляр*. Перпендикуляр – отрезок, проведенный к другому отрезку под прямым углом.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к его основанию, называется *высотой* треугольника.

Обозначим ее длину параметром h. Высота делит основание треугольника на две части. Обозначим их длины соответственно a_1 и a_2.

И что?

Проведя высоту, мы разбили произвольный треугольник на два прямоугольных треугольника. Сумма площадей этих двух прямоугольных треугольников даст искомую площадь треугольника. А площади прямоугольных треугольников мы умеем вычислять: надо перемножить длины сторон, образующих прямой угол, и результат разделить на два.

Запишем формулы для площадей двух треугольников:

$$S_{\Delta 1} = \frac{h \cdot a_1}{2} \text{ и } S_{\Delta 2} = \frac{h \cdot a_2}{2}.$$

Сложим эти две площади и получим искомую площадь произвольного треугольника:

$$S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} = \frac{h \cdot a_1}{2} + \frac{h \cdot a_2}{2} = \frac{h \cdot a_1 + h \cdot a_2}{2} = \frac{h(a_1 + a_2)}{2}$$

Но (a_1+a_2) есть длина основания a.

Следовательно, площадь любого треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{h \cdot a}{2}$$

Читается это так: *площадь треугольника равна половине произведения длин его основания и высоты*.

Таким образом, мы заменили достаточно хлопотное измерение площади треугольника простым измерением длин его основания и высоты и вычислением. Чем не экономия!

Точно так же вычислим площадь трапеции. Трапеция – четырехугольник, у которого параллельны только две стороны.

Допустим, вам надо покрасить пол в комнате вашего ребенка. Пусть пол в комнате имеет форму трапеции. Покрасить 1 квадратный метр стоит, к примеру, 100 руб. Сколько нужно денег, чтобы покрасить весь пол. Пусть ребенок поможет вам вычислить точную сумму, которую нужно будет выплатить мастеру.

Ясно, что надо описать площадь пола. Как? Измерить? Но это довольно хлопотно. Выпиливать из фанеры квадратный метр и сравнивать…

Надо вычислить. А по какой формуле?

Пусть формулу ребенок выведет сам. У него есть все, что для этого необходимо. Только подскажите, что трапецию можно разбить на прямоугольник и два прямоугольных треугольника, формулы вычисления площадей которых, нам уже известны.

Урок 21, на котором вычисляем площади простых фигур

Вычисление – величайшее изобретение. Вычисления позволяют неимоверно сократить время, силы и средства для определения нужных параметров. Вычисления позволяют смоделировать процесс и проанализировать будущие результаты практически без затрат ресурсов.

Как этому научиться?

Продолжать учебу.

Проверим домашнее задание, данное на предыдущем уроке. Удалось ли вашему ребенку вывести формулу для вычисления площади трапеции? И насколько верна полученная формула? Ведь для ее проверки необходимо сравнить значение площади, вычисленное по полученной формуле, с измеренным ее значением. Если результаты совпадут…

А нельзя ли проверить правильность формулы иным, более экономным способом? Все-таки вырезать квадратик и пытаться сосчитать, сколько их поместится в трапецию, чтобы измерить ее площадь – довольно хлопотное дело.

Можно. Это называется *доказательством*.

Допустим, ваш ребенок получил формулу площади трапеции в следующем виде:

$$S = \frac{h \cdot (a + b)}{2}$$

где a и b – длины соответственно нижнего и верхнего оснований трапеции; h – размер ее высоты.

Пусть покажет, как он получил эту формулу. Если каждый шаг будет ясен и очевиден, то формула тоже очевидна.

Доказательство – сведение к очевидному, к аксиоме.

Аксиома – утверждение настолько очевидное, что не требует подтверждения.

Хотя часто и очевидность подводит.

В нашем случае, очевидно, что площадь трапеции равна сумме площадей двух треугольников и одного прямоугольника, которые получаются после проведения двух высот.

Для большей очевидности можно сделать чертеж.

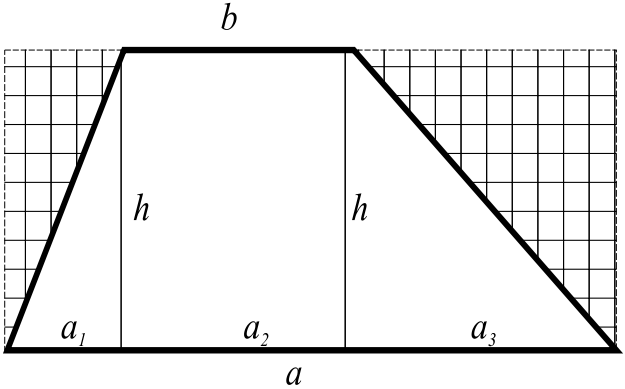


Рис. 32

Итак, площадь первого треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонами a_1 и h.

Следовательно, площадь первого треугольника будет

$$S_{\Delta 1} = \frac{a_1 \cdot h}{2}.$$

Площадь прямоугольника, что в центре, очевидно равна

$S_2 = a_2 h$.

Площадь второго треугольника, соответственно, равна половине площади прямоугольника со сторонами a_3 и h или

$$S_{\Delta 3} = \frac{a_3 \cdot h}{2}.$$

И, наконец, площадь трапеции равна сумме полученных площадей.

$S = S_{\Delta 1} + S_2 + S_{\Delta 2}$

Подставим значения площадей:

$$S = \frac{a_1 \cdot h}{2} + a_2 h + \frac{a_3 \cdot h}{2}.$$

Как сложить площади треугольников и прямоугольника?

Сведем все к прямоугольникам. У нас две половинки площадей двух разных прямоугольников и одна целая площадь третьего прямоугольника. Одна целая состоит из двух своих половинок, т.е.

$$a_2 h = 2\frac{a_2 \cdot h}{2}$$

Следовательно,

$$S = \frac{a_1 \cdot h}{2} + 2\frac{a_2 \cdot h}{2} + \frac{a_3 \cdot h}{2};$$

$$S = \frac{a_1 \cdot h + 2a_2 \cdot h + a_3 \cdot h}{2};$$

Вынесем за скобки общий множитель h.

$$S = \frac{h(a_1 + 2a_2 + a_3)}{2}$$

Очевидно, что $a_1 + a_2 + a_3 = a$.

$$S = \frac{h(a + a_2)}{2}$$

Заменим a_2 на параметр b. Ведь они равны как противоположные стороны прямоугольника. Получим

$$S = \frac{h \cdot (a + b)}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Итак, если формула получена, то ее желательно доказать.

Если формула неизвестна, то ее надо вывести.

Вывод и доказательство два противоположных процесса.

Для чего все это нужно?

У нас наглядная картинка, измеряемые величины и простая логическая последовательность. Годы обучения в нормальной школе с приличными педагогами и решение тысяч задач при достижении ясности в теории, постепенно вырабатывают опыт решения и более сложных задач, которые называются житейскими.

Продолжим решение простых задачек.

Выведем формулу для вычисления площади правильного многоугольника. У правильного многоугольника все стороны и все углы равны.

Вначале, кажется, что задачка не решается. Но соединим вершины многоугольника с его центром. Получим множество равных треугольников. (Рис. 33)

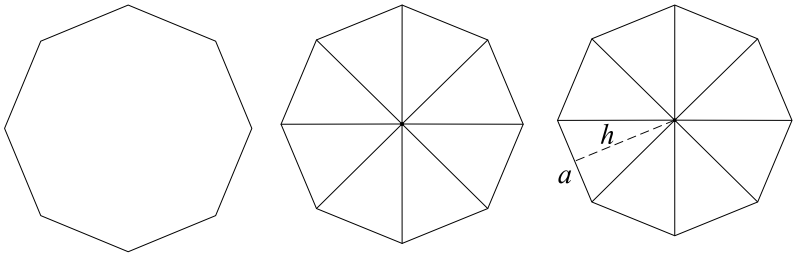


Рис. 33

Чтобы вычислить площадь одного треугольника достаточно измерить его основание *a* и высоту *h*. Это довольно просто. Формула площади треугольника известна:

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2}$$

Умножив площадь одного треугольника на количество треугольников в правильном многоугольнике, получим площадь многоугольника. Количество треугольников равно количеству сторон многоугольника. Пусть число сторон будет *n*.

Следовательно,

$$S = S_{\Delta} \cdot n$$

или

$$S = \frac{a \cdot h \cdot n}{2}$$

Мы опять заменили довольно хлопотное *измерение* площади правильного многоугольника простым ее *вычислением*. Нам нужно только измерить длину одной стороны многоугольника, длину перпендикуляра, опущенного на него из центра многоугольника и сосчитать количество сторон.

До сих пор у нас шло простое накопление знаний. Каждый следующий шаг легко выводился из предыдущего. Но попробуйте вывести формулу площади круга.

Круг – плоскость, ограниченная окружностью.

Здесь нет ни одного привычного прямого отрезка. Что и как нужно измерить и в какую формулу подставить?

Здесь нужен качественно иной подход. И мы к нему готовы.

Итак, круг – это плоскость, ограниченная окружностью.

Впишем в окружность правильный многоугольник. Площадь правильного многоугольника мы умеем вычислять.

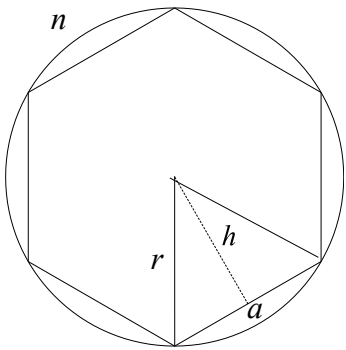


Рис. 34

Она равна: $S = \dfrac{a \cdot h \cdot n}{2}$

Умножив длину одной стороны (a) на количество сторон (n), мы получаем сумму длин всех сторон многоугольника, т.е. его *периметр* ($P = a \cdot n$).

Следовательно, формулу площади правильного многоугольника можно переписать в виде:

$$S = \frac{h \cdot P}{2}.$$

Из чертежа видно, что высота треугольника меньше радиуса, его периметр многоугольника меньше длины окружности и его площадь – меньше площади круга.

А если удвоить количество сторон многоугольника?

Получим новый вписанный правильный многоугольник, площадь которого больше площади предыдущего многоугольника, но все еще меньше площади круга.

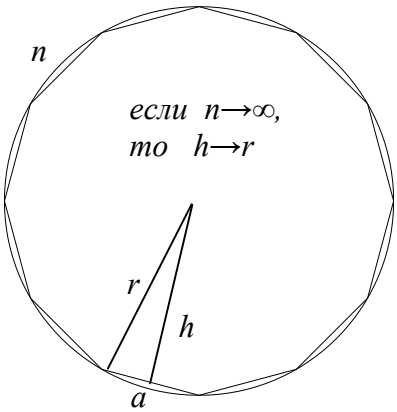


Рис. 35

А если увеличивать количество сторон до бесконечности?

В этом случае отрезки, составляющие стороны многоугольника уменьшатся настолько, что превратятся в точки, расположенные на окружности. Следовательно, площадь этого многоугольника станет равной площади круга. А периметр многоугольника будет практически равен длине окружности. Математики говорят, что длина периметра *стремится* к длине окружности и будет ей равна только в пределе. Но в рамках нашего исследования это не существенно. Остается добавить, что, соответственно, высота треугольника станет равной радиусу.

Заменив в формуле для площади многоугольника, у которого число сторон стремится к бесконечности, периметр на длину окружности, а высоту на радиус, получим площадь круга:

$$S = \frac{h \cdot P}{2} = \frac{r \cdot c}{2}$$

Здесь мы можем измерить длину радиуса, но не можем измерить длину окружности. Подставим вместо длины окружности ее связь с длиной радиуса из формулы $c = 2\pi r$.

Получим,

$$S = \frac{r \cdot \cancel{2}\pi \cdot r}{\cancel{2}} = \pi r^2$$

Потрясающе!

Урок 22, на котором доказывается знаменитая теорема Пифагора

О теореме Пифагора, пожалуй, слышали все. Но не все могут ее сформулировать. Еще меньше тех, кто может ее доказать. Ваш ребенок будет чувствовать себя гораздо спокойнее и увереннее, если будет уметь это делать. Да, – скажет он, – я много не знаю и не умею, но я могу доказать терему Пифагора.

А о чем гласит теорема Пифагора?

О том, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Как это перевести на понятный язык и как это доказать.

Если умножить число само на себя, то полученное произведение называется квадратом этого числа.

Например, $4 \cdot 4=16$. Следовательно, 16 есть квадрат числа 4. Записывается это так $4^2=16$. Читается: четыре в квадрате равно шестнадцати.

А при чем здесь квадрат?

В самом деле, почему это действие – умножение числа самого на себя – назвали возведением в квадрат.

Мы знаем, что квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны. Следовательно, умножив длину одной стороны саму на себя, получим площадь квадрата. Т.е., *квадрат длины стороны квадрата равен площади квадрата*! Звучит весело. Тем не менее, именно поэтому, результат умножения числа самого на себя, называют квадратом этого числа.

Это будет использовано для доказательства теоремы Пифагора.

А что такое катет и гипотенуза?

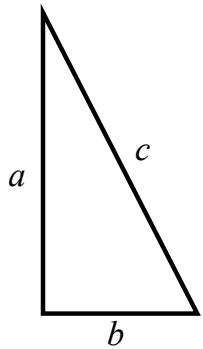


Рис. 36

В прямоугольном треугольнике стороны (a и b), образующие прямой угол, называются *катетами*. А сторона (с), лежащая напротив прямого угла – *гипотенузой*.

Итак, теорема Пифагора гласит: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Докажем это.

Прямоугольный треугольник достроим до квадрата. Для этого, к длине первого катета добавим длину второго катета, и к длине второго – длину первого.

На полученных равных сторонах достраивают квадрат. Назовем его большим квадратом. Длина каждой из его сторон равна сумме (a+b). Рис. 37.

Отметим на сторонах большого квадрата отрезки, длины которых равны катетам b и a. Теперь соединим отрезками стыки катетов. Эти отрезки – гипотенузы равных прямоугольных треугольников. Они равны друг другу. Четырехугольник, составленный ими – квадрат. Назовем его малым квадратом.

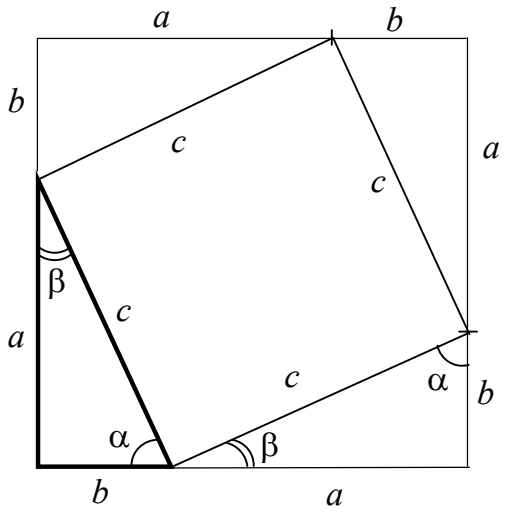


Рис. 37

Наш ученик будет согласно кивать. Ему будет казаться, что все понятно.

– А почему четырехугольник образованный гипотенузами – квадрат?

– ?

– Полученные прямоугольные треугольники равны друг другу?

– Да!

– Почему?

– По первому признаку. У них равны катеты, т.е. у них равны длины двух сторон и величины углов между ними тоже равны.

– Следовательно, стороны четырехугольника, образованного гипотенузами, тоже равны.

– Да!

– Но надо доказать что углы в этом четырехугольнике прямые. Как это сделать?

Рассмотрим два нижних треугольника. Сумма острых углов в каждом из них по 90º. Т.е. $\alpha+\beta=90º$.

Здесь, угол между катетом b левого треугольника и катетом a правого – развернутый, т.е. равен 180º. Следовательно, угол между их гипотенузами будет:

$180º - (\alpha+\beta) = 180º - 90º = 90º$

Аналогично, для всех пар гипотенуз. Следовательно, они образуют квадрат.

На полученном чертеже видно, что площадь большого квадрата равна сумме площадей малого квадрата и четырех равных треугольников. Запишем это в виде формулы:

$S = S_1 + 4S_\Delta$.

Но, площадь большого квадрата равна квадрату его стороны, а его сторона равна $(a+b)$. Следовательно,

$S = (a+b)^2$.

Площадь малого квадрата, соответственно, равна квадрату гипотенузы, т.е. $S_1 = c^2$.

А площадь одного треугольника равна

$$S_\Delta = \frac{a \cdot b}{2}$$

Следовательно,

$$(a+b)^2 = c^2 + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\cancel{2}_{1}}.$$

В левой части $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a \cdot b + b^2$. Значит,

$$a^2 + \cancel{2\,a \cdot b} + b^2 = c^2 + \cancel{2\,a \cdot b}$$

или

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Что и требовалось доказать!

Урок 23, на котором выясняется, что теорема помогает обходить препятствия

– Для чего учить уроки?

– Для того, чтобы учительница не поставила двойку.

Следовательно, если учительница двойки не ставит, то уроки учить незачем! Следовательно... можно поискать другие способы, чтобы учительница не ставила двойки.

И способы находят. Начиная от коробки конфет на день рождения до банальной взятки. И это потому, что на первый вопрос был дан неверный ответ. Попробуем дать другой ответ.

– Для чего учить уроки?

– Для того, чтобы стать успешным и богатым!

Но биографии успешных и богатых в большинстве своем показывают обратное. Да и ныне, для достижения успеха и обретения богатства, теорема Пифагора как будто не нужна. Так для чего ее учить?

– Для того, чтобы стать человеком!

Философский аспект вопроса «что есть человек?» оставим на потом. Детей это не интересует. Детей не интересуют будущие успехи и будущие богатства. Их вообще не интересует взрослое будущее. Их интересует детское настоящее. Дети любят играть. Поэтому лучше превратить занятия в игру, в которой нужно победить или в загадку-задачку, которую надо решить.

Итак, вот задачка: как определить расстояние между двумя деревьями, если между ними небольшое болотце и по нему пройти нельзя?

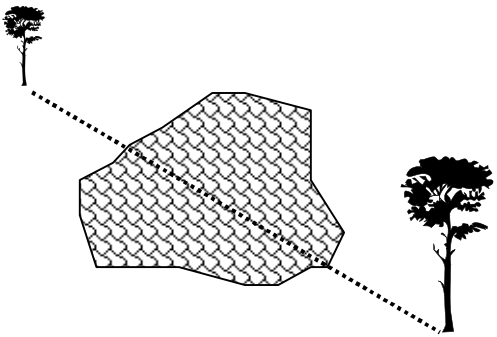


Рис. 38

Ребенок здесь может предложить, например, привязать к веревке камень и перебросить через болото... Но по условию задачи, болото пересекать нельзя, т.е. *измерить* расстояние между деревьями невозможно. А мы знаем, что если нельзя измерить, то можно попробовать *вычислить*. Вычислить с помощью других измерений и формулы. Пусть попробует.

Напомните ему о теореме Пифагора. Да, теорему он помнит. А как ее теперь применить?

Если ребенок догадается построить прямоугольный треугольник (рис. 39) и, измерив катеты АС и ВС, вычислит нужное расстояние АВ, то это будет грандиозный успех. Такого молодца обязательно нужно похвалить и дать приз за победу. Неважно, какой будет приз, пусть это будет просто конфета... Важно, чтобы успех был замечен.

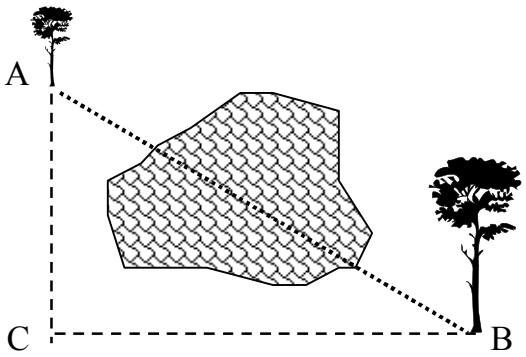


Рис. 39

Отпраздновав победу, надо озадачить победителя новой проблемой.

На бумаге легко построить прямоугольный треугольник. А как это сделать на местности? Как, например, во дворе построить большой прямоугольный треугольник, т.е. как построить прямой угол, если ни транспортира, ни нивелира, ни других инструментов нет... Есть только длинная веревка. Пусть ребенок подумает.

Но не томите его долго. Вряд ли он сам догадается. Сообщите, что, например, перед древними строителями стояла та же задача, и они ее решали. Решали с помощью, так называемого, *египетского треугольника*. А какой треугольник называется египетским?

Здесь мы опять возвращаемся к игре числами или к магии чисел. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц – прямоугольный. Об этом говорит теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

Следовательно, треугольник – прямоугольный.

Причем, это единственная последовательность чисел, отличающихся друг от друга на единицу, для которой выполняется это равенство. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц, называется египетским треугольником.

Сумма длин сторон египетского треугольника равна 12 единицам. А с числом 12 мы уже знакомы.

Возьмем длинную веревку и завяжем на ней узлы, так чтобы получилось 12 равных отрезков.

Рис. 40

Соединим-свяжем ее концы и получим кольцо. Делений на нем столько же, сколько и на циферблате часов – 12.

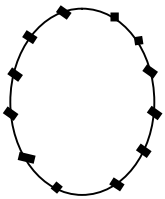


Рис. 41

Теперь достаточно натянуть кольцо между колышками, расположенными соответственно через три, четыре и пять узелков, и мы получим прямоугольный треугольник.

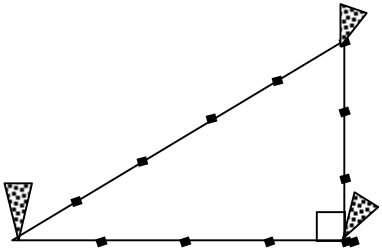


Рис. 42

Применим это к нашей задаче. По условию задачи мы не можем пересекать болото. Но все окружающее пространство использовать можно. Мы можем построить прямой угол в другом месте так, чтобы катеты AC и BC были продолжениями катетов EC и DC.

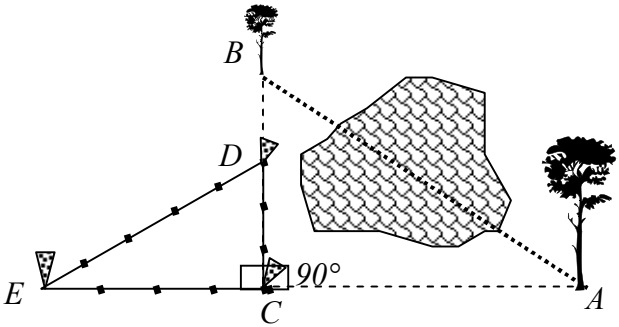


Рис. 43

Урок 24, на котором появляется дискриминант

Терема Пифагора связывает длины сторон прямоугольного треугольника… Вернее, квадраты длин его сторон.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Следовательно, может получиться уравнение, где неизвестная величина будет находиться под знаком квадрата. Это квадратное уравнение.

Как решать квадратные уравнения?

Метод тот же самый. Надо развести известные и неизвестные величины по разные стороны от знака равенства.

Рассмотрим вначале простой случай.

$2x^2 - 32 = 0$

Решаем по нашей схеме: избавимся в левой части от известного слагаемого и т.д.

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 - 32 & = & 0 \\ \underline{\quad +32} & & \underline{+32} \\ \dfrac{2x^2}{2} & = & \dfrac{32}{2} \\ x^2 & = & 16. \end{array}$$

Избавимся от квадрата

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$$\pm x = 4$$

В большинстве случаев, у квадратного уравнения будут два корня. В данном случае $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Рассмотрим еще один случай.

Пусть

$4x^2 - 12x = 0$

Здесь, просто выносим общий множитель ($4x$) за скобки

$4x\,(x - 3) = 0$

Мы знаем, что произведение двух выражений равно нулю, только если один из сомножителей равен нулю.

В первом случае: $4x = 0$ при $x = 0$.

Во втором случае: $x - 3 = 0$ при $x = 3$.

Здесь, у уравнения тоже два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Рассмотри третий и наиболее общий случай. Пусть

$2x^2 + 3x + 1 = 0$

Здесь первые два способа нам не помогут.

Для удобства обозначим известные величины (коэффициенты) соответственно буквами *a, b, c.*

Получим запись квадратного уравнения в общем виде

$ax^2 + bx + c = 0$

Избавимся от множителя *a,* разделив на него обе части уравнения. Получим

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Имеем: квадрат первого числа, плюс первое число x, умноженное на b/a … Было бы хорошо, если бы было удвоенное произведение первого числа и b/a. Получился бы квадрат суммы двух чисел. А, давайте, умножим числитель и знаменатель второго слагаемого на два:

$$x^2 + \frac{2 \cdot bx}{2 \cdot a} + \frac{c}{a} = 0$$

Получили квадрат первого числа, плюс удвоенное произведение первого (x) и второго $\left(\frac{b}{2a}\right)$ чисел. Далее должен был бы стоять квадрат второго числа. Но его нет. А, давайте, прибавим его и, чтобы не нарушить уравнение, его же и вычтем

$$x^2 + \frac{2bx}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Первые три слагаемые можно собрать в квадрат суммы двух чисел:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Здесь второе и третье слагаемые не содержат неизвестных величин. Вычтем их из левой и правой частей. Получим

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Раскроем в правой части скобки и выполним вычитание.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Избавимся от квадрата в левой части, извлекая корень квадратный из обеих частей уравнения

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Осталось вычесть из левой и правой частей выражение $\frac{b}{2a}$

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Т.к. в числителе имеем квадратный корень, то у уравнения может быть два корня

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Мы получили формулу корней квадратного уравнения.

Теперь можем решить исходное уравнение

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

Здесь, a=2, b=3 и c=1

Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{4} = -1$$

Уравнение решено.

А что такое «дискриминант»?

Это слово сразу вспоминают дети, как только с ними заговаривают о решении квадратного уравнения. Многие даже знают, как его вычислить. Но на вопрос, что это такое? практически никто не может ответить.

Рассмотрим еще раз формулу корней квадратного уравнения.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Здесь, в правой части в числителе под знаком квадратного корня находится разность двух выражений. Следовательно, при некоторых значениях a, b и c, под квадратным корнем может получиться отрицательное число. Но под корнем не может быть отрицательного числа. В этом случае говорят, что уравнение не имеет корней

Разность $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом*, т.к. она позволяет различить, есть корни у уравнения или их нет. Поэтому, прежде чем приступить к решению уравнения, вычисляют значение дискриминанта.

Если дискриминант положителен, то продолжают решение. Корней у уравнения два.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Если же он отрицателен, то сразу говорят, что корней нет.

А если дискриминант равен нулю, то у уравнения только одно решение:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Урок 25, на котором хорда рождает неравенство

– Какая буква закреплена за величиной хорды?

– Закрепленной буквы нет.

– А какие буквы закреплены за величинами радиуса, диаметра и окружности?

– Это буквы *r*, *d*, *c*.

– Как называются буквы, обозначающие величины?

– Они называются параметрами.

– Значит ли это, что у хорды нет параметра?

– Ну, длина, т.е. величина у хорды есть, но закрепленной буквы нет.

– Почему?

– В одной и той же окружности длины радиусов, диаметров и длина окружности – величины постоянные. А длина хорды в одной и той же окружности может быть разной.

– Очень хорошо! Но можно ли длину хорды обозначить буквой, т.е. ввести для нее параметр.

– Наверное, можно.

– Предлагай, какой буквой обозначим длину хорды.

– Пусть будет буква *l*.

– Хорошо. Теперь задача: вычисли длину диаметра, длину окружности и длину хорды в окружности, радиус которой равен 10 *м*.

– Длина диаметра равна 20 *м*. Длина окружности равна 31,4 *м*, а длина хорды… Она может быть любой.

– Любой? Может ли она быть равной 40 *м*?

– Нет, не может.

– Но ты же сказал, что длина хорды может быть любой.

– Любой, но не больше длины диаметра.

– А меньше быть может?

– Может.

– Даже отрицательной?

– Нет, отрицательной длины не бывает.

– Как записать все значения длин хорд, которые могут быть в данной окружности.

– Это невозможно.

– А параметрами? Как называется связь между параметрами?

– Формула!

– У нас есть формулы, связывающие параметры r, d, c. Запиши их.

– Их три: $d=2r$; $c=\pi d$ и $c=2\pi r$.

– А параметр l (длина хорды) связан с параметрами r, d, c?

– Нет.

– Но, ты же сам сказал, что длина хорды не может быть больше длины диаметра. Значит, каким-то образом они связаны.

– Да. Но длину хорды нельзя вычислить по длине диаметра. Мы только знаем, что она меньше длины диаметра.

– Следовательно, значение параметра l лежит в каком-то интервале. А как записать все возможные значения длины хорды для окружности данного радиуса?

Интервалы значений параметров записываются с помощью известных знаков: $>$ (больше), $<$ (меньше),

≥ (больше или равно), ≤ (меньше или равно), ≠ (не равно). Следовательно, в нашем случае:

$$l \neq c; \quad l \leq d; \quad l \leq 2r; \quad c \geq \pi \cdot l$$

Эти выражения называются неравенствами.

Неравенство – отрицание равенства.

Любое уравнение превращается в неравенство, если поставить условием вычисление значений переменной, не удовлетворяющей данному уравнению.

Рассмотрим простейшее линейное уравнение

$$2x-12=0$$

Значение переменной x, удовлетворяющее этому равенству, равно 6.

А какие значения не удовлетворяют?

Все остальные, кроме 6.

Как это записать?

Ясно, что для всех значений переменной x отличной от 6, выражение $(2x-12)$ будет или меньше нуля или больше нуля.

Рассмотрим 1-ый случай.

$$2x-12>0$$

Получили неравенство.

Правила решения неравенств такие же, как и для решения равенств (уравнений). Решим данное неравенство.

$$2x-12 > 0$$
$$\underline{+12} \quad \underline{+12}$$
$$\frac{2x}{2} > \frac{12}{2}$$
$$x > 6$$

Следовательно, для всех значений переменной x больше 6, выполняется наше неравенство. Покажем все эти значения на числовой прямой.

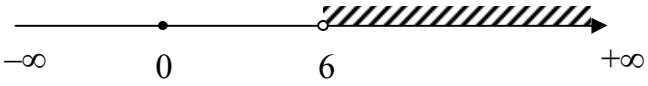


Рис. 44

Заштрихованная часть показывает все решения нашего неравенства. Записывается решение неравенства так:

$$x \in (6; +\infty)$$

Читается это так: переменная x принадлежит интервалу значений от 6 до плюс бесконечности, не включая само число 6. Невключение числа 6, здесь обозначено круглой скобкой перед числом 6, а на чертеже – пустым кружочком в точке 6.

Решим второе неравенство. Здесь, $x < 6$.

Покажем все эти значения на числовой прямой.

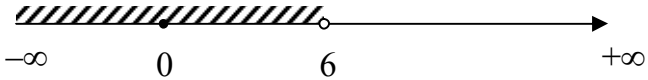


Рис. 45

Заштрихованная часть показывает все решения второго неравенства. Запишется решение так:

$$x \in (-\infty; 6)$$

Читается это так: переменная x принадлежит интервалу значений от минус бесконечности до 6, не включая само число 6. Невключение числа 6, здесь,

обозначено круглой скобкой после числа 6, а на чертеже – пустым кружочком в точке 6.

Объединение обоих решений и есть все значения переменной x, которые не являются решениями рассматриваемого уравнения $2x–12=0$. Записывается это объединение так

$$x \in (-\infty; 6) \cup (6; \infty).$$

Итак, неравенства решаются так же, как и равенства. Но, за одним исключением: при делении или умножении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный.

Например, решим еще неравенство.

$$7 - \frac{x}{2} \geq 0;$$

$$-\frac{x}{2} \geq -7;$$

$$x \leq 14.$$

При выполнении последнего действия, мы умножили обе части неравенства на минус два. Умножение обоих частей неравенства приводит к изменения знака неравенства на противоположный. Было больше или равно (≥) стало меньше или равно (≤).

На числовой оси решение неравенства выглядит так:

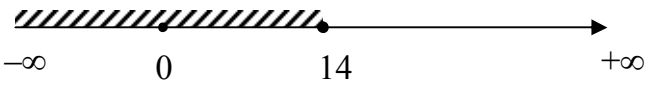


Рис. 46

Решение неравенства запишется так:

$$x \in (-\infty; 14].$$

Читается это так: переменная x принадлежит интервалу значений от минус бесконечности до 14, включая само число 14. Включение числа 14, здесь, обозначено квадратной скобкой после числа 14, а на чертеже – залитым кружочком в точке 14.

Решение более сложных неравенств рассмотрим на одном из следующих уроков (стр.202).

Урок 26, на котором измеряем вероятность и проверяем достоверность

Игра. Играть любят и все. Главное в игре – неопределенность результата. Никто не знает, чем она закончится. Если результат заранее известен, такая игра никому не интересна, и это не игра.

Количественная оценка возможного результата называется вероятностью.

Я подбрасываю монету. Орел или решка? Результат заранее неизвестен. Одно из двух: или орел, или решка. Вероятность выпадения «орла» равна одной второй или 0,5.

Я подбрасываю игральную кость. Может выпасть значение от 1 до 6. Вероятность выпадения, например, 5 равна одной из шести или одной шестой.

Вероятность события А обозначим P(A).

Обозначим количество всех возможных результатов события параметром n.

Обозначим количество благоприятных исходов параметром m.

Тогда, $P(A) = m / n$.

Если $P(A)=1$, то это событие называют *достоверным*.

Если $P(A)=0$, то событие называют *невозможным*.

Если $0< P(A)<1$, то событие называют *случайным*.

Рассмотрим еще пример.

Пусть в урне 15 шаров. 4 красных, 5 белых и 6 синих. Достали один шар.

Пусть Р(К) – вероятность события, при котором шар окажется красным, Р(Б) – белым, Р(С) – синим.

Какова вероятность каждого события?

Р(К)=4/15

Р(Б)=5/15=1/3

Р(С)=6/15=2/5.

Сумма всех вероятностей всегда равна единице.

Р(К)+Р(Б)+Р(С)= 4/15+1/3+2/5=1

Какова вероятность, что шар окажется цветным?

Здесь, ответ может быть получен двумя способами.

Мы знаем, что вероятность события, при котором шар окажется белым равна Р(Б)= 1/3. Следовательно, вероятность события, при котором шар окажется цветным, будет: 1 – Р(Б) = 1– 1/3 = 2/3.

Или. Всего цветных шаров 4+6=10. Следовательно, вероятность события, при котором шар окажется цветным, будет Р(Ц)=10/15=2/3.

А какова вероятность события, при котором шар окажется желтым?

У нас в урне нет желтого шара. Данное событие невозможно: Р(Ж)=0.

А какова вероятность события, при котором вытащенный предмет окажется шаром?

У нас в урне только шары. Поэтому, если мы что-то и вытащим из урны, то это будет только шар – это достоверное событие. Его вероятность равна единице: Р=1.

Урок 27, на котором появляется 3D геометрия

Смотрел ли ваш ребенок 3D фильм?

Конечно, смотрел.

А что такое 3D?

3D – сокращение от *Three-dimensional*, т.е. трехмерный, объемный.

А что такое объем?

Точка не имеет размера (размерности) и определения.

Множество точек, расположенных рядом, – *прямая линия*... Часть прямой, ограниченная двумя точками – *отрезок*. Отрезок можно измерить. Он имеет только длину. Он одномерен.

Множество параллельных прямых – *плоскость*.

Часть плоскости, ограниченная замкнутой кривой – *площадь*.

Площадь для плоскости – то же, что отрезок для прямой.

Измерить – значит, сравнить с эталоном.

Следовательно, измерить площадь – значит, сравнить ее с эталоном площади. Площадь двумерна. Она имеет длину и ширину.

А что получится, если множество плоскостей расположить друг над другом параллельно друг другу? Получится *пространство.*

Пространство, ограниченное площадями, называется *объемом*. Объем трехмерен. Он имеет длину, ширину и высоту.

Пусть ребенок приведет пример пространства и объема.

Конечно, пространство у него будет только космическое (неограниченное ничем), а объемом – пространство комнаты, ограниченное площадями стен, пола и потолка.

Заметим что объем обычной комнаты – это пространство ограниченное прямоугольниками. Такой объем называют *прямоугольным параллелепипедом*.

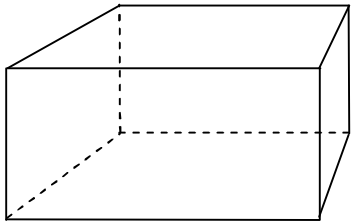


Рис. 47

Потренируйтесь совместно составить описание того, что изображено на рис. 47.

Кратчайший вариант, т.е. *определение*, будет следующим: *прямоугольный параллелепипед* это – пространство, ограниченное прямоугольниками. В самом деле, если потребуется ограничить пространство прямоугольниками, их придется взять ровно шесть и всегда получится *прямоугольный параллелепипед*.

Тогда, *параллелепипед* – это пространство, ограниченное параллелограммами.

Сторона параллелепипеда, называется *гранью*.

У параллелепипеда все грани представляют собой параллелограммы.

Стороны граней, называются ребрами параллелепипеда.

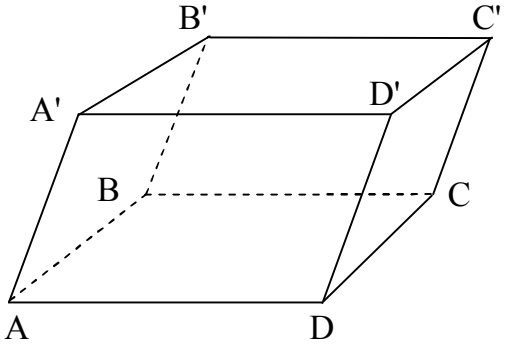


Рис. 48

В тексте обозначаться параллелепипед будет заглавными буквами, соответствующими его вершинам. Например, на рис. 48 изображен параллелепипед ABCDA'B'C'D'.

Как описать размер объема?

Надо его измерить. Измерить, значит сравнить с эталоном.

А что у нас в качестве эталона объема?

Эталоном площади была плоскость, ограниченная квадратом со стороной 1 *м*, т.е. один квадратный метр (1 $м^2$).

Эталоном объема будет куб с ребром в 1 *м,* т.е. один кубический метр (1 $м^3$) . У куба шесть граней и каждая представляет собой квадрат.

Куб – это прямоугольный параллелепипед с квадратными гранями.

Предложите ребенку описать объем комнаты. Спросите, что нужно сделать, чтобы измерить объем комнаты?

Он, конечно, начнет говорить, что надо взять линейку и вначале измерить длину и ширину, потом измерит высоту и все перемножить. Так его в школе учили. Но вы напомните, что задание было – измерить объем, а не вычислить его.

Если ему не удастся это сделать, вы драматическим тоном расскажете, что для этого надо будет вынести всю мебель, потом из фанеры сколотить куб, у которого длина, ширина и высота будут по 1 *м*.

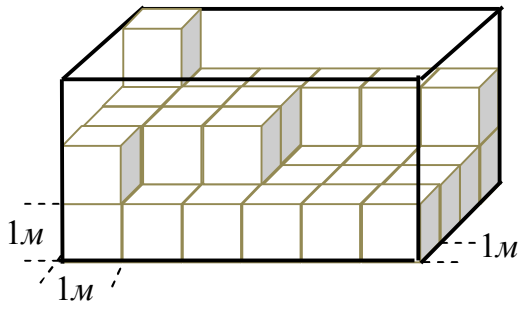


Рис. 49

А потом надо будет сосчитать, сколько таких кубов потребуется, чтобы полностью заполнить всю комнату.

Он будет впечатлен.

А нельзя ли упростить операцию?

Можно. Поставим мысленный эксперимент.

Спросите, сколько кубов потребуется, чтобы заполнить весь пол. Площадь пола мы умеем вычислять. Площадь пола показывает, сколько квадратов со

стороной один метр потребуется, чтобы полностью заполнить пол. Но ведь основание куба с ребром в 1 *м*, тоже имеет площадь ровно 1 квадратный метр. Следовательно, количество кубов, которое заполнит пол, будет равно площади пола. И это только один слой высотой в 1 *м*. Количество слоев будет равно высоте комнаты в метрах.

Пусть ребенок шагами измерит длину и ширину комнаты. Пусть два его средних шага равны 1 *м*. Допустим, длина комнаты 5 метров, а ширина – 4 *м*. Теперь вычислим площадь пола. Это он сделает легко.

$$S = a \cdot b = 4 \times 5 = 20\ (м^2)$$

Сколько кубических метров потребуется, чтобы покрыть ими весь пол? Правильно, тоже 20.

А сколько еще потребуется кубических метров, чтобы заполнить всю комнату. Высота кубиков равна 1 *м*. А чему равна высота комнаты? Пусть ее высота равна 3 *м*. На один метр высоты приходится 20 кубических метров, а на три – 60.

Следовательно, для вычисления площади прямоугольного параллелепипеда, нужно измерить длины его ребер, образующих меду собой прямой угол. Их произведение даст объем, т.е. $V = a \times d \times h$

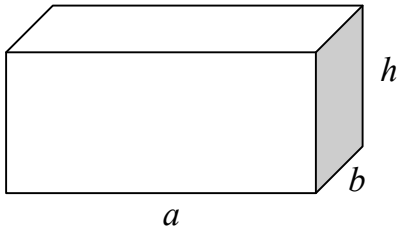


Рис. 50

V – параметр, обозначающий объем (первая буква английского *volume* – объем)

Объем куба:

$$V = a \times a \times a = a^3$$

Теперь понятно, почему третью степень числа называют кубом числа.

Объем параллелепипеда: $V = S \cdot h$

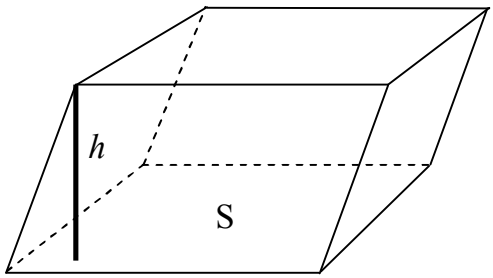


Рис. 51

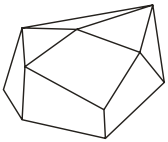
Здесь, h – высота параллелепипеда – перпендикуляр, опущенный из вершины параллелепипеда к его основанию; S – площадь основания параллелепипеда.

Итак, у прямоугольного параллелепипеда есть объем. Но у него есть и поверхность. Как вычислить площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда?

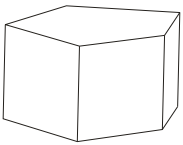
Над этой задачкой пусть ребенок подумает сам и сам получит формулу, а вы, в крайнем случае, задайте ему несколько наводящих вопросов.

Урок 28, на котором пространство заполняется объемами

Объем – это пространство ограниченное площадями.

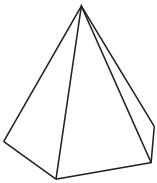


Объем, ограниченный многоугольниками, называется *многогранником*.



Многогранник, у которого две грани параллельны и равны, называется *призмой*.

Объем призмы: V=Sh.



Многогранник, у которого все грани, кроме одной, – треугольники с общей вершиной, называют *пирамидой*.

Объем пирамиды: $V=\frac{1}{3}Sh$

Пирамида, имеющая в основании треугольник – *треугольная пирамида*.

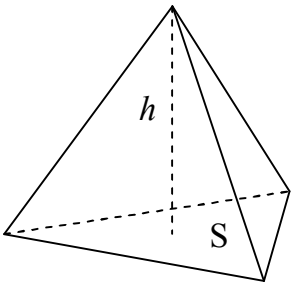


Рис. 52

Остались конус и цилиндр.

Здесь, поиграем в игру. Представим, что у пирамиды в основании правильный многоугольник с бесконечно большим количеством сторон. Такое основание ничем не будет отличаться от круга. Пирамида превращается в конус.

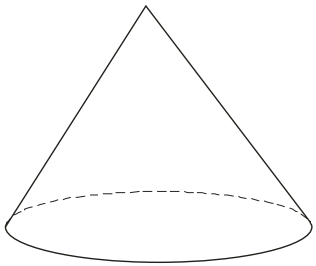


Рис. 53

Объем конуса: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

А теперь представим призму, у которой в основании правильный многоугольник с бесконечно большим количеством сторон. Опять получаем в основании круг. Призма превращается в цилиндр.

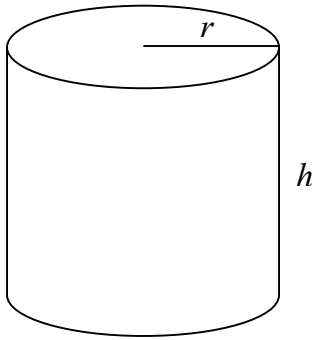


Рис. 54

Попросите ребенка описать, что он видит? (рис. 52). Если он скажет, что у него не получается описать, подбодрите его, пусть вначале попробует неправильно описать. Неправильное описание – тоже описание. Потом его можно будет исправить.

Пусть попробует вспомнить описание куба или прямоугольного параллелепипеда.

Цилиндр – пространство, ограниченное двумя параллельными кругами и … изогнутым прямоугольником? Не очень складно.

Попробуем по-другому. Вспомним, как мы описывали объем. Аналогично, получаем: цилиндр – множество параллельных кругов, нанизанных на прямую, проходящую через их центры.

Уже лучше.

Верхний и нижний круги, называют *основаниями цилиндра*.

Поверхность цилиндра, образованная множеством ее окружностей, называют *боковой поверхностью*.

Перпендикуляр, соединяющий плоскости оснований цилиндра, называется его *высотой*.

Объем цилиндра измерить кубиками невозможно. Но его можно вычислить.

В основании цилиндра расположен круг. Как вычислять площадь круга мы знаем: $S = \pi r^2$.

Объем цилиндра будет равен произведению площади его основания и высоты.

$$V = S \cdot h = \pi r^2 h.$$

Площадь поверхности цилиндра складывается из площадей его оснований и площади боковой поверх-

ности. Боковая поверхность представляет собой прямоугольник, со сторонами равными высоте и длине окружности.

Площадь основания цилиндра $S_1 = \pi r^2$.

Площадь боковой поверхности цилиндра

$S_2 = c \cdot h = 2\pi r \cdot h$.

Следовательно, площадь поверхности цилиндра равна:

$S = 2S_1 + S_2 = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$.

Теперь рассмотрим мячик. Попросите ребенка описать поверхность мячика. Вначале покажется, что здесь не за что зацепиться.

Пусть он вспомнит определение окружности. Это он сделает сразу. Теперь, скажите, что более точное математическое определение у нее будет таким: *окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки.*

Подскажите, что в некотором смысле и поверхность мячика – множество точек пространства, равноудаленных от данной точки. Данное множество точек называется сферой.

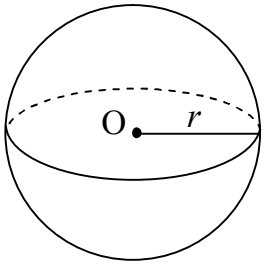


Рис. 55

Итак, *сфера – множество точек пространства, равноудаленных от данной точки*.

Точка равноудаленная от сферы, называется ее центром.

Отрезок, соединяющий точку сферы с ее центром, называется радиусом сферы.

И наконец, *шар – пространство, ограниченное сферой.*

Площадь поверхности сферы:

$$S = 4\pi r^2.$$

Объем шара:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Можно поставить ряд вопросов, на которые ребенок должен будет ответить сам.

– Есть ли у шара диаметр?

– Как измерить диаметр шара?

– Можно ли измерить радиус шара?

– Как вычислить радиус шара?

У нас получилось множество фигур, площади поверхностей и объемы которых вычисляются по соответствующим формулам. Причем, эти формулы связаны друг с другом общими параметрами. Следовательно, можно построить множество уравнений, которые позволять вычислить необходимый параметр, с помощью его связей с другими параметрами. Важно, чтобы ребенок понял, что эти **связи можно построить самостоятельно!**

Урок 29, на котором степень возводим в степень

В предыдущих главах, сложение одинаковых групп мы назвали умножением (стр. 28), а результат умножения – произведением.

Произведение двух одинаковых множителей мы назвали квадратом числа: $a \cdot a = a^2$.

Произведение трех одинаковых множителей мы назвали кубом числа: $a \cdot a \cdot a = a^3$.

А как будет называться произведение четырех одинаковых множителей? Любого количества одинаковых множителей?

Оно будет назваться степенью числа.

Степень числа – произведение одинаковых множителей. Сам множитель, здесь, называется основанием степени, а количество множителей – показателем степени.

Например, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Здесь 3 – основание степени; 4 – показатель степени;

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Это – a в четвертой степени. Здесь a – основание, а 4 – показатель степени.

Умножение чисел с одинаковыми основаниями производится просто:

$3^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$, т.е. $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$.

Запишем это параметрами.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Теперь рассмотрим деление.

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}{\cancel{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = 3^2$$

Или

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

Запишем это параметрами.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

После этого вступления, попросите возвести число в степени в степень. Например, пусть ваш ребенок преобразует выражение $(3^2)^4$ в число со степенью.

Должно получиться:

$$(3^2)^4 = (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$$

или

$$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

Потом попросите, чтобы он записал это же выражение параметрами.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Это все была теория. Теперь предложите вычислить, чему будет равно выражение $(7^6)^3 : (7^7)^5$?

$$(5^6)^3 : (5^2)^8 = \frac{5^{18}}{5^{16}} = 5^2 = 25.$$

Теперь предложите вычислить значение следующего выражения

$$(25^6)^3 : (5^7)^5$$

Прежде, чем ребенок приступит к вычислениям, спросите, одинаковые ли основания у степеней?

Конечно, нет.

А можно ли их привести к одинаковым основаниям?

Можно. Надо представить 49 как семь в квадрате. Получим:

$$(25^6)^3 : (5^7)^5 = 25^{6\cdot 3} : 5^{7\cdot 5} = 25^{18} : 5^{35} =$$

$$= \frac{(5^2)^{18}}{5^{35}} = \frac{5^{2\cdot 18}}{5^{35}} = \frac{5^{36}}{5^{35}} = 5^{36-35} = 5$$

Чтобы закрепить умение действовать по правилам, нужно перерешать множество примеров. Их вы найдете в школьном учебнике. А мы у уже довольно измотанного ребенка спросим, а бывают ли отрицательные показатели степени? Он в отчаянии возведет глаза к небу, но вы все же не отступайте. Скажите, что, конечно, бывают, и мы только что с ними познакомились.

Где? – воскликнет он.

Рассмотрим последнее правило еще раз

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Его можно записать в следующем виде:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{n+(-m)} = a^n \cdot a^{-m}$$

Т.е.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m}$$

Разделим обе части на a^n получим

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

И наоборот,

$$\frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

Добавим еще одно правило: произведение чисел с одинаковыми показателями степени, равно их произведению в данной степени, т.е.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

И наоборот, степень произведения, равна произведению степеней:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Пусть верность этого правила ребенок докажет сам.

Используя последнее правило, вычислим значение выражения

$$\frac{6^7 \cdot 8^7}{48^6} = \frac{(6 \cdot 8)^7}{48^6} = \frac{48^7}{48^6} = 48^{7-6} = 48$$

Теперь, предложите выполнить вычисления, делая преобразование только в знаменателе.

$$\frac{6^7 \cdot 8^7}{48^6} = \frac{6^7 \cdot 8^7}{(6 \cdot 8)^6} = \frac{6^7 \cdot 8^7}{6^6 \cdot 8^6} = 6^{7-6} \cdot 8^{7-6} = 6 \cdot 8 = 48$$

А как возводить в степень дробь?

Очень просто, ведь деление и умножение – взаимно обратные действия.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$$

Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

У нас показателями степени выступали целые положительные и отрицательные числа. А чему равна степень числа, если его показатель ноль.

Пришли к выводу, что *любое* число в нулевой степени равно единице, т.е.

$a^0 = 1$.

Возводить в степень можно и сложные выражения. Попросите ребенка раскрыть скобки в выражении $(a+b)^2$.

Если он напишет, что $(a+b)^2=a^2+b^2$, попросите сделать проверку, подставив конкретные числа. Например,

$(3+5)^2 = 3^2+5^2 = 9+25=34$.

Но, на самом деле, $(3+5)^2= 8^2=64$.

Ответы не сходятся!

Пусть еще раз вспомнит, что значит возвести выражение в квадрат? Под знаком квадрата у нас сумма $(a+b)$. Следовательно,

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2= a^2+2ab+b^2$$

Чтобы каждый раз не делать эти пространные выкладки, можно запомнить, что *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого и второго чисел и плюс квадрат второго числа.* Т.е. можно сразу записывать:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Проведем вычисление по этой формуле

$(3+5)^2= 3^2+2\cdot3\cdot5+5^2= 9+30+25=64$.

Теперь все сходится.

Аналогично,

$(a–b)^2 = a^2–2ab+b^2$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого и второго чисел и плюс квадрат второго числа.

В качестве домашнего задания, предложите ребенку самостоятельно составить формулу сокращенного умножения для куба суммы и куба разности.

Урок 30, на котором идет игра в превращения

Упростите выражение.

Такой фразой начинается множество заданий в учебнике. Что это значит и для чего это нужно.

Когда-то, давным-давно, когда все вычисления делались вручную на бумаге, предварительно упростить выражение было крайне необходимо для ускорения расчетов. Сегодня, в век компьютеров, особой необходимости в этом нет. Но нам нужно привить ребенку способность упрощать сложную задачу, нужно показать, что это вообще возможно. Поэтому поиграем на моделях.

Пусть ребенок попробует раскрыть скобки в произведении.

$(a+b)(a-b)$.

Это он сможет сделать.

Он должен с удивлением и с некоторым восторгом показать, что

$(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$

Удивитесь вместе с ним и выпишите отдельно эту чудесную формулу:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Мы получили разность квадратов двух чисел. Следовательно, теперь можно разложить на множители разность квадратов:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Пусть ребенок прочитает эту запись.

Он скажет следующее: «А в квадрате минус б в квадрате равно а плюс б умножить на а минус б».

Отлично!

Теперь пусть прочитает то же самое, но только не параметрами, а терминами.

Ребенок задумался.

Составьте вместе с ним следующее предложение: *«Разность квадратов двух чисел равна произведению их суммы и разности».* Он будет впечатлен.

Теперь попросите упростить выражение.

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}.$$

Ребенок будет долго смотреть, но не решится что-либо делать. Напомните, что он должен просто делать то, что может, и не делать то, что не может. Может ли он разложить на множители разность квадратов в числителе и квадрат суммы в знаменателе? Конечно, может. Нужно ли это делать? Нужно. Поможет ли это? Пока не знаем, но делаем!

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{(a+b)}(a+b)}=\frac{(a-b)}{(a+b)}$$

Как здорово получилось!

Следовательно, если нужно вычислить значение выражения

$$\frac{75^2-25^2}{(75+25)^2}$$

то после упрощения это было бы нетрудно сделать:

$$\frac{75^2-25^2}{(75+25)^2}=\frac{75-25}{75+25}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

Попробуем еще.

Нужно сократить выражение

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}.$$

Со знаменателем ничего не сделать. А вот числитель представляет собой квадрат разности двух чисел. Свернем его по известной формуле сокращенного умножения: $(a–b)^2 = a^2–2ab+b^2$.

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2}{x-y}=\frac{\cancel{(x-y)}(x-y)}{\cancel{x-y}}=x-y.$$

Здорово!

Теперь дадим выражение посложнее.

Пусть он вычислит значение выражения

$$a(36a^2-25)\left(\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}\right), \quad \text{при } a=36{,}7$$

Если сразу подставить вместо a его значение, то получится слишком громоздкое вычисление. Вначале надо упростить выражение.

Спросите, квадраты каких чисел дают, соответственно, 36 и 25? Что получится, если произвести замену чисел на их квадраты в первой скобке?

$$36a^2-25=6^2a^2-5^2=(6a)^2-5^2$$

Получилась разность квадратов. Пусть разложит его на множители:

$$(6a)^2-5^2=(6a-5)(6a+5)$$

Осталось подставить результат в основное выражение.

$$a(6a-5)(6a+5)\left(\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}\right)$$

Что делать дальше. Он, скорее всего, будет порываться сделать отдельно вычитание во второй

скобке. Но будет проще, если раскрыть скобки и сделать умножение. Сокращая одинаковые множители в числителе и знаменателе, получим

$$a(6a-5)(6a+5)\left(\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}\right)=$$

$$=a(6a-5)\cancel{(6a+5)}\frac{1}{\cancel{6a+5}}-a\cancel{(6a-5)}(6a+5)\frac{1}{\cancel{6a-5}}=$$

$$=\cancel{6a^2}-5a-\cancel{6a^2}-5a=-10a$$

Теперь можно подставить значение a=36,7

$-10a=-10\cdot 36{,}7=-367$.

А что делать, если степень числа дробная?
Надо начинать новый урок.

Урок 31, на котором извлекаем корни

Возведение в степень – вполне самостоятельное математическое действие. Значит, должно быть и обратное ему действие. Действие обратное возведению в степень называется извлечением корня соответствующей степени.

Например, вычисление числа, квадрат которого равен 16, называется извлечением корня квадратного из 16. Записывается это действие с помощью специального символа $\sqrt{\ }$, который так и называется – корень квадратный.

$$\sqrt{16} = 4$$

Пусть ребенок прочитает это выражение.

Он скажет, что корень квадратный из шестнадцати равен четырем. Очень хорошо. Теперь, попросите его прочитать то же выражение, только не произнося слово корень. Помогите ему получить: «Вычисли число, квадрат которого равен шестнадцати». Покажите, что короткая запись $\sqrt{16}$, заменяет предложение из шести слов. Это гораздо удобнее.

Соответственно, вычисление числа, куб которого равен, например 27, называется извлечением корня кубического от 27. Записывается это действие с помощью специального символа $\sqrt[3]{\ }$, который так и называется – корень кубический.

$$\sqrt[3]{27} = 3\,.$$

А как записывается действие, предполагающее вычисление числа, четвертая степень которого равна 81:

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

Здесь, 3 – корень четвертой степени из числа 81.

Запишем эти действия с помощью параметров.

$$\sqrt[m]{a} = b$$

Под корнем может оказаться и сама степень, т.е. $\sqrt[m]{a^n}$, например $\sqrt[5]{7^4}$. Значение этого выражения трудно вычислить. Но вы предложите вычислить значение выражения $\sqrt[8]{7^8}$. Добейтесь того, чтобы он сам догадался, что результат будет равен семи.

Следовательно, $\sqrt[n]{a^n} = a$

Точно так же, корень числа может быть возведен в степень: $(\sqrt[n]{a})^m$.

Например, $(\sqrt[3]{7})^2$. Здесь постарайтесь, чтобы ребенок увидел знакомое возведение в степень. Что бы ни было под показателем степени 2, оно должно быть умножено само на себя.

Можете продемонстрировать даже это:

$\square^2 = \square \cdot \square$; $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$; $(\otimes + \otimes)^2 = (\otimes + \otimes) \cdot (\otimes + \otimes)$ и т.д.

Следовательно,

$$(\sqrt[3]{7})^2 = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7 \cdot 7} = \sqrt[3]{49}$$

Для выполнения действий с корнями, удобно представить их в виде степени:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Например, $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$.

Дробная степень – это всегда корень. Например,

$$7^{1,5} = 7^{1\frac{1}{2}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = 7\sqrt{7}$$

Предложите упростить выражение $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^5}$

Так как теоретический курс у нас был довольно кратким, вначале это задание покажется ребенку тяжелым. Но вы скажите, что просто нужно смело следовать известным правилам.

Представим корни в виде степеней. А при умножении степеней с одинаковыми основаниями, их показатели складываются. Следовательно,

$$\sqrt[7]{5^2} \cdot \sqrt[14]{5^3} = 5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{3}{14}} = 5^{\frac{2}{7}+\frac{3}{14}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

Предложите вычислить значение выражения $\sqrt[3]{7} \cdot 49^{\frac{5}{6}}$. Должно получиться:

$$\sqrt[3]{7} \cdot 49^{\frac{5}{6}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{5}{6}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot (7^2)^{\frac{5}{6}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{2\cdot\frac{5}{6}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{5}{3}} =$$

$$= 7^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 7^{\frac{6}{3}} = 7^2 = 49.$$

Вычислим значение выражения

$$\frac{6^{\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}}{48^{\sqrt{5}-1}} = \frac{(6\cdot 8)^{\sqrt{5}}}{48^{\sqrt{5}} \cdot 48^{-1}} = \frac{\cancel{48^{\sqrt{5}}} \cdot 48^1}{\cancel{48^{\sqrt{5}}}} = 48$$

Как извлекать корень из дроби?

Так как мы можем представить корень в виде дробной степени, а действия со степенями нам уже известны, то получается:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}.$$

Или просто

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$$

Запишем это параметрами:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Пусть, теперь ребенок попробует вычислить значение выражения

$\frac{b^{3\sqrt{2}+2}}{(b^{\sqrt{2}})^3}$, при b=6

Пусть сделает то, что может сделать.

В числителе показатель степени – сумма. Значит, можно степень разложить на множители.

А в знаменателе – возведение степени в степень, значит, степени надо перемножить, т.е.

$$\frac{b^{3\sqrt{2}+2}}{(b^{\sqrt{2}})^3}=\frac{\cancel{b^{3\sqrt{2}}}b^2}{\cancel{b^{3\sqrt{2}}}}=b^2$$

Теперь можно подставить значение b=6.

$b^2=6^2=36$

Все понятно? Может быть. Давайте проверим. Пусть наш ученик решит уравнение:

$$4^{2x-5} = 64$$

Он, конечно, начнет возмущаться: таких уравнений он никогда не видел. Ничего страшного. Пусть он приведет данное уравнение к виду, который он видел!

У нас в левой части степень. Можно ли и правую часть тоже представить в виде степени?

Можно. $64=4^3$.

Подставим это значение в правую часть.

Получим

$$4^{2x-5} = 4^3$$

Теперь, пусть сравнит основания степеней. Они равны друг другу. В левой части основание 4 и в правой части тоже 4. Следовательно, показатели степеней тоже должны быть равны. Запишем это.

$$2x-5=3$$

Это уравнение он уже может решить сам.

Урок 32, на котором корни и степени знакомятся с логарифмами

Запишем рядом степень числа и корень числа.

$$b = a^n \ ; \ \ a = \sqrt[n]{b}$$

– Сколько здесь параметров?
– Три.
– Какие?
– *a, b, n.*
– А сколько формул?
– Две.
– Одной не хватает. Какой?

Наверное, той, которая помогла бы вычислить показатель степени *n*. Но как записать символами выражение: *вычисли показатель степени n, в которую надо возвести число a, чтобы получилось число b?*

Символ, показывающий это действие, называется логарифмом. Записывается оно так

$$\log_a b = n$$

Читается: логарифм *b* по основанию *a* равен *n*.

Означает: результат этого действия есть показатель степени *n*, в которую надо возвести число *a*, чтобы получилось число *b*. Добавим эту формулу к тем двум, что были вначале и получим все три формулы, связывающие три параметра.

$$b = a^n \ ; \ a = \sqrt[n]{b} \ ; \ n = \log_a b.$$

Понял ли наш ученик, что такое логарифм числа?

Может быть. Но, хорошо бы проверить. Пусть вычислит значение выражения:

$$5^{\log_5 17}.$$

Он скажет, что это невозможно.

– Показателем степени у числа пять стоит логарифм. Это видно?

– Да.

– Прочитай показатель степени.

– Логарифм 17 по основанию 5.

– И чему он равен?

– Не знаю!

– И я не знаю. Но ведь логарифм означает показатель степени.

– Да.

– В нашем случае показатель степени чего?

– Числа 5.

– И что должно получиться, если число 5 возвести в эту степень?

– 17.

– Следовательно, логарифм 17 по основанию 5 равен показателю степени, в которую надо возвести 5, чтобы получилось 17.

– Да…

– Повтори, пожалуйста.

– Логарифм 17 по основанию 5 равен показателю степени, в которую надо возвести 5, чтобы получилось 17.

– Отлично. Теперь посмотри еще раз на все выражение. Что ты видишь?

– Я вижу число 5, и у него показателем степени стоит логарифм.

– Т.е., у пятерки показателем степени стоит тоже показатель степени. Ведь логарифм – это показатель степени.

– Да.

– Значит, у пятерки показателем степени стоит другой показатель степени.

– Да.

– Он нам известен?

– Нет.

– А что нам про него известно?

– Известно, что если в эту степень возвести число 5 должно получиться 17.

– Ну, вот! Понятно?

– Нет…

– В общем виде, у числа 5 такой показатель степени, что если в эту степень возвести число 5, то получится число 17. Видишь?

– Да.

– Значит, чему равняется значение всего выражения?

– $5^{\log_5 17}=17$.

– Молодец!

В общем виде это запишется так:

$$a^{\log_a b} = b$$

Это формула может считаться формулой логарифма: **логарифмом** числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Итак, у нас троица

$$b = a^n \ ; \ a = \sqrt[n]{b} \ ; \ n = \log_a b.$$

Ясно, что все три – это одна и та же формула, только каждый раз вычисляется своя переменная.

– Все понятно?

– Да.

– Проверим. Реши уравнение

$$\log_3(x - 7) = 4$$

– А я таких уравнений еще не видел.

– В прошлый раз ты говорил то же самое. Приведи данное уравнение к виду, который ты видел.

– А как?

– Просто запиши это же выражение в другой форме. Например, в виде степени.

$$3^4 = x - 7$$

$$81 = x - 7$$

$$x = 88$$

Отлично!

Для логарифма можно вывести такие же формулы, как для степени и корня.

1. Логарифм единицы равен нулю:

$\log_a 1 = 0$.

2. Если логарифм числа равен единице, то само число равно основанию логарифма:

$\log_a a = 1$.

3. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Здесь, пусть наш ученик докажет это.

Скажите только, что надо воспользоваться основной формулой логарифма, которая позволяет выразить число через его логарифм. Выразим x и y через их логарифмы:

$$x = a^{\log_a x}; \quad y = a^{\log_a y}.$$

Вычислим произведение xy, подставив значения множителей:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

т.е.

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Теперь спросите, в какую степень надо возвести здесь число a, чтобы получилось произведение xy? Конечно, в степень ($\log_a x + \log_a y$).

А как записать, чему равна эта степень с помощью логарифма?

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Доказали.

4. Логарифм частного равен разности логарифмов делителя и делимого.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Доказывается это аналогично предыдущему случаю.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y};$$

Следовательно, показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить отношение

$\frac{x}{y}$, можно записать как логарифм этого отношения по основанию a:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

5. Логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания этой степени.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

Доказываем так же. Знаем, что:

$$x = a^{\log_a x}$$

Возведем обе части в степень n.

$$x^n = (a^{\log_a x})^n;$$

$$x^n = a^{n \log_a x}$$

Следовательно, по определению логарифма, показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить x^n есть $n \log_a x$. Запишем это.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

Урок 33, на котором царевичи разгадывают загадки

Вы, наверное, уже поняли, что во всех предыдущих уроках был применен какой-то метод. Что это за метод?

В знаменитой Панчатантре (санскр. – «Пятикнижие») – древнеиндийской книге мудрости, – есть сюжет, который подскажет суть этого метода. Книга начинается так:

«Давным-давно в южной Индии был город под названием Паталипутра (в настоящее время известный как Патна), которым правил справедливый царь Сударшана. Его почитали не только жители государства, но и цари соседних держав. Они часто приезжали к нему, чтобы засвидетельствовать свое почтение и привезти богатые дары. Подданные тоже горячо любили своего царя, но, несмотря на это, раджа был печален. Думал он о своих сыновьях, которые не хотели учиться и вели себя очень дурно. Ведь говорится, что молодость, богатство, власть и безрассудство, равно и как и неразборчивость могут погубить человека, лишенного добродетели. Как сладкая речная вода становится невкусной, когда достигнет моря, так и все эти вещи становятся пороками, когда ими обладает недобрый человек. И еще сказано: «Как от множества звезд нет света, так и от глупых сыновей нет никакого толку. Но подобно луне, освещающей ночное небо, один достойный сын придает блеск всему роду».

Грусть все больше снедала сердце царя. Наконец, не в силах выносить глупости своих детей, он созвал тайный совет. «О, наимудрейшие, – обратился он к министрам, – вы знаете, что в материальном мире счастье приносят лишь богатство, хорошее здоровье, красивая и сладкоречивая жена, послушный сын и знание. Разумный человек должен стремиться к знаниям так, словно будет жить вечно. Сын, который не является ни святым, ни ученым – позор для всей семьи. Мысль о моих детях не дает мне покоя. Отказываясь учиться, они глупеют день ото дня. Какой толк от неразумных и непослушных сыновей! Не родившийся или мертвый сын лучше, чем глупый, ведь первые два причиняют страдание лишь один раз, а глупец – на каждом шагу. Как ворона не в почете среди лебедей, так и в собрании ученых мужей необразованный сын не встречает уважения. Родители, не дающие своему сыну образование, являются его врагами. Я должен что-то делать и потому решил обратиться к вам за помощью. Не знает ли кто из вас гуру, который смог бы обучить моих детей благородству и мудрости, которыми должно обладать достойным сыновьям раджи? Как осколок стекла кажется драгоценностью, когда находится рядом с золотом, так же и глупец приобретает опыт через общение с учеными людьми. Человек деградирует, общаясь с низкими людьми, не меняется в обществе равных и совершенствуется, общаясь с теми, кто его в чем-то превосходит. Я ничего не пожалею в награду за его труд».

Но советники и министры молчали. Наконец один из присутствующих встал и сказал: «В городе

живет святой Вишнушарма. Он очень мудр. Я думаю, ему наверняка удастся обучить царевичей искусству праведной жизни. Пригласи его во дворец».

Царь отправил гонцов с подарками в дом святого. Узнав о горе царя, он улыбнулся и сказал: «Как река несет травинку к огромному океану, так же и знание, даже если им обладает простой человек, может привести его к царю».

Вишнушарму встретили во дворце правителя с почестями.

– Я слышал, что вы очень ученый человек, и потому хочу попросить вас стать гуру для моих сыновей. Однако хочу предупредить, что никому еще не удалось научить их чему-либо. Я опасаюсь, что они не вполне пригодны к обучению.

– Как стекло не находят в месторождении топазов, так же бесполезные и негодные сыновья не рождаются в царской династии, – улыбнулся брахман.

– Но как вы собираетесь учить их? Они не питают никакого интереса к учебе!

– Я буду рассказывать им истории.

– Истории.

– Узоры на глиняном горшке не изменить после обжига, а впечатления, оставшиеся в умах юных учеников, сохраняются всю жизнь. Поэтому я буду учить их, рассказывая истории, легенды.

– Что ж, если вы сможете передать им свои познания, я щедро вознагражу вас.

На что мудрец отвечал:

– Я вижу, вы мудрый человек, и цените знание. В этом вы правы, знание – это лучшее богатство, по-

тому что его нельзя украсть. Оно бесценно и нетленно. Однако я не продаю своих познаний, ибо я не торговец и пришел сюда не за этим. Мне, старику, деньги ни к чему. В течение шести месяцев я буду обучать ваших сыновей бесплатно.

Обрадовался раджа Сударшана благородству учителя и отдал ему в обучение своих трех сыновей. Для проведения занятий им выделили верхнюю террасу на крыше дворца. И вот в назначенное время царевичи пришли на первый урок.

– О, брахман, – сказал один из них, – мы слышали, что ты собрался учить нас? Но мы никак не возьмем в толк, зачем нам это?

– У нас есть все: богатство, дворец, слуги, – добавил его брат. – Так к чему же нам твои уроки?

Учитель, пряча улыбку в бороду, отвечал:

– Я не думаю, что смогу научить вас чему-либо, вы и так много знаете. Я пришел, чтобы просто рассказать вам забавные истории. А что касается знания… Может вы слышали, что некогда был царь, очень гордый и надменный человек. Однажды к нему во дворец пришел святой, и царь спросил, какой смысл в его странствованиях, ведь так он никогда не накопит богатств. Тот ему ответил, что истинное богатство – это знание. Царь посмеялся и спросил, не знает ли случайно его будущее, раз он такой знающий. Святой ответил, что знает. «Ну, и что же до меня ожидает?» – полюбопытствовал раджа. «Ты скоро умрешь, но ты так благочестив, что небожители заберут тебя к себе. Там ты будешь гораздо богаче, чем сейчас. Однако есть одна проблема. В твоем дворце будет множество комаров, и хотя у тебя

будет прекрасная сетка от них, в ней будет дыра, через которую они будут тебя кусать». Царю предсказание понравилось, и он уверил мудреца, что просто заштопает дыру, на что святой возразил: «План хорош, но ты не учел того, что в раю нет иголок. Поэтому, когда ты будешь умирать, позаботься о том, чтобы взять иголку с собой». – «Но как я смогу взять с собой иголку?» – «Понятия не имею, – отвечал святой. Но если ты даже иголку не можешь взять с собой, почему ты так гордишься своим земным богатством?»

Царевичи озадаченно переглядывались.

– Есть нечто более ценное, чем деньги. Знание превосходит материальное богатство, – продолжал Вишнушарма, – так как оно является причиной приобретения всего остального, и когда его раздаешь, оно лишь увеличивается. Его не тяжело нести, и никто не может силой отобрать его.

– В этом есть какой-то смысл, – сказал третий принц, устраиваясь поудобней.

– Расскажи что-нибудь еще, – попросил второй.

– Мы послушаем, – согласился со сказанным первый.»

Далее мудрец предложил для начала загадку, которая на первый взгляд казалась неразрешимой. И когда царевичи уверились в том, что ответа как будто нет, он привел такое простое и красивое решение, что они замерли в восхищении, но тут же стали убеждать, что они бы и сами догадались. Тогда он предложил еще одну задачку, о которой царевичи сказали, что она уж точно не имеет решения. Но после объяснений

учителя, решение опять оказалось таким простым и красивым, что царевичи от досады кусали себе локти... Они стали требовать еще задачку, уверяя, что на этот раз они точно отгадают. Но мудрый учитель предложил вначале записать предыдущие решения, чтобы не забыть. Так они стали совершенствоваться в письме и через это в учебе. Через полгода, записанные ими с помощью учителя поучительные истории, составили пять книг – Панчатантру.

Вам надо обязательно иметь ее дома.

Так, а где наш ребенок?

Урок 34, на котором все находят свои места

– Где гуляет этот ребенок в такой поздний час?

Это вопрос, который очень часто задают родители. Правда, не каждый ребенок может на него ответить. Поможем ему в этом.

Прежде всего, отметим, что этот вопрос в точности совпадет с основной задачей механики: где находится тело в данный момент времени? Так что, вопрос этот серьезный, и вы не должны быть особо пристрастны к невразумительным ответам ваших чад.

Для начала возьмем задачку попроще. Попросите вашего ребенка объяснить, где живет один из его друзей. Он, скорее всего, назовет его адрес; например, улица Строителей, дом 5, квартира 17. Но вы можете сказать, что вам этот адрес ничего не говорит, т.к. вы не знаете, где находится улица Строителей. Ребенок начнет махать руками и рассказывать, что надо проехать туда и туда…

Здесь, можно блеснуть своей эрудицией и заявить, что был такой древнекитайский мудрец по имени Конфуций, который как-то сказал: если показываешь направление, не показывай рукой! И дальше с важным видом пояснить мысль Конфуция: человеку дан язык, чтобы описывать то, что надо сообщить; а конечностями размахивают бессловесные твари или неучи. Потом, не давая опомниться, спросить:

– А в кино ты ходишь?

– Конечно, хожу.

– А как ты находишь свое место в зрительном зале?

– По билету.

– А как по билету?

– А там написано, какой ряд и какое место.

– Допустим, фильм уже начался. В зале темно. Как найти свое место!

– Там есть дежурный с фонариком, он и покажет…

В самом деле: зачем учить географию, если кучер отвезет!

Но, все-таки? Допустим, 8-й ряд, 10-е место. Откуда начинать отсчет рядов? Наверное, отсчет идет от чего-то, что видно из любого места зрительного зала. А что в зрительном зале видно из любой точки? Конечно экран! Вот от экрана и отсчитаем восемь рядов.

А место? Мы читаем и считаем слева направо. Следовательно, если смотреть от экрана, то слева направо отсчитываем десять мест… Вот – наше! Но там уже кто-то сидит... Что это значит?

– Это значит, что кто-то сел на мое место. Его надо попросить…

– А он показывает свой билет, в котором тоже указано: 8-й ряд, 10-е место.

– Значит, в кассе напутали.

– Что делать?

– Позвать дежурного по залу.

– Дежурный посмотрел оба билета и сказал, что в кассе ничего не напутали.

– Но так не бывает!

– Бывает. Насколько я помню, на билете еще что-то бывает написано.

– Время!

– Верно. Один из вас пришел не на свой сеанс.

Итак, нужно знать: откуда считать, куда считать, сколько считать и… когда считать! Следовательно, если мы впервые идем в гости к нашему другу, то он должен сообщить нам все четыре параметра: откуда, куда, сколько и когда. Когда? – определить просто, достаточно назвать время. А вот как определить откуда, куда и сколько? Точно так же как и в кинозале: надо найти ориентир, положение которого было бы всем известно. Допустим, ЦУМ – это начало отсчета. От ЦУМа строго на восток – это направление. Пройти два квартала – это количество.

Итак, положение тела в пространстве можно определить только относительно других тел, чье положение известно. Здесь появляется соответствующий термин – *координата*. Правда, мало найдется ребят, которые могут сразу дать определение термину координата. Большинство ребят ошибочно считают координату точкой. Наверное, потому что координату обычно обозначают одной буквой, например x. Давайте разберемся.

Нам нужно описать положение дома так, чтобы собеседник понял, где он находится, и смог бы его найти. Например, пусть нужный дом находится в четырех кварталах восточнее ЦУМа. Здесь ЦУМ – начало отсчета. Направление на восток – известное направление. А квартал – единица измерения расстояния. Графически это можно изобразить следующим образом:

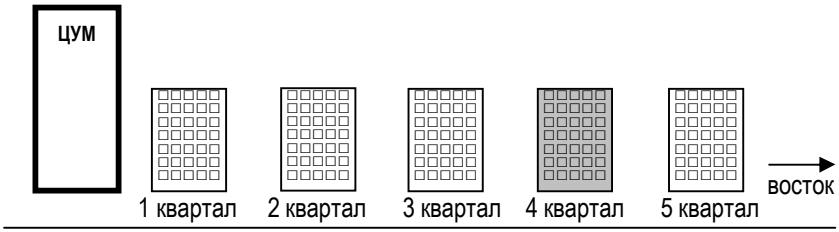


Рис. 56

Описание положения дома в данной системе будет: 4-й квартал на восток от ЦУМа.

Если мы просто скажем, что дом находимся в четырех кварталах от ЦУМа, то дом нелегко будет найти сразу. Ведь в четырех кварталах от ЦУМа находятся 4 дома: на севере, востоке, юге и западе. Но каждый раз говорить, что нужный дом находится в 4-х кварталах на восток от ЦУМа можно в обыденной речи, а нам нужна универсальная модель, отвечающая требованиям экономии и точности. Нам нужно *определение* – предельно краткое описание.

Урок 35, на котором координата обретает смысл

Обозначим точку отсчета буквой «О». Проведем направленную прямую, проходящую через эту точку и обозначим ее буквой «Х». Направленная прямая будет называться осью ОХ. Разобьем ее на равные отрезки в масштабе одно деление – 1 метр. Получили простейшую систему координат (рис. 57).

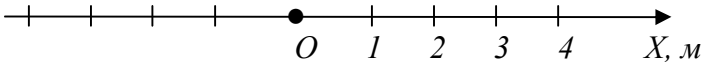


Рис. 57

Итак, нам известны: начало отсчета, направление отсчета и единица отсчета (масштаб).

Если нами получена информации о том, что некоторый предмет (тело) находится на расстоянии 3 метра от начала отсчета в направлении ОХ, то мы понимаем, где оно! (рис. 58).

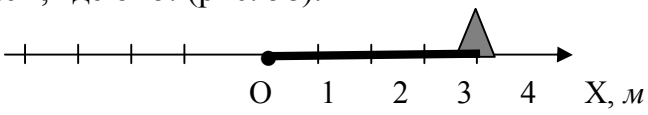


Рис. 58

Мы получили отрезок на оси между началом отсчета и положением тела. Его длина равна 3 *м*. Каждый раз положение тела будет определяться подобным отрезком. В общем случае величина отрезка есть *ох*.

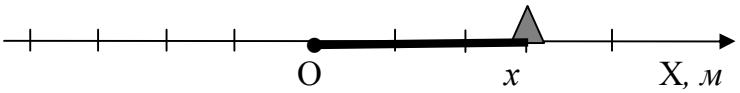


Рис. 59

Но начало отсчета всегда одно и то же. Исходя из принципа экономии, можем первую букву «о» опустить и обозначить длину отрезка только одной буквой *x*.

Следовательно, положение тела в данном случае, может быть обозначено только одним параметром *x* и он равен 3 метрам.

Допустим, другое тело находится тоже на расстоянии 3 метра от начала отсчета, но в противоположном направлении. Отсчет в противоположном направлении обозначим знаком «–» (минус).

Так как у нас уже два тела, координату первого обозначим x_1, а второго обозначим x_2.

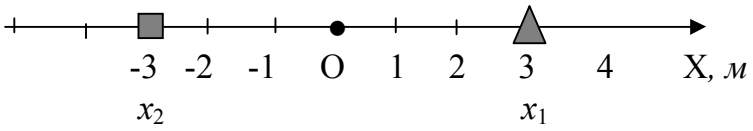


Рис. 60

В данном случае $x_1 = 3$ *м*, $x_2 = -3$ *м*.

Еще раз отметим, что координата – это не точка *x*, а отрезок *ox*. Первую букву мы убрали по принципу экономии (т.к. начало отсчета всегда одно и то же).

Итак, зная координату тела, мы знаем, откуда считать, в каком направлении считать и сколько. В этом нам помогает система координат. Добавим к ней отсчет времени и получим *систему отсчета.*

Теперь мы можем сообщить, где находится данное тело в данный момент времени.

Урок 36, на котором выясняется, для чего нужны координаты

Если нам сообщили или мы сообщили, в каком направлении и на каком расстоянии от известного места находится объект, неужели этого не достаточно? Для чего вводить координаты и оси?

В самом деле, если известно, откуда, куда и сколько, то больше ничего как будто не нужно. Но как описать, сколько и куда? Надо измерить расстояние и угол. Но проделать измерения, как мы уже видели по предыдущим урокам, бывает иногда трудно или вообще невозможно. В этих случаях мы *измерения* заменяли *вычислениями*. Для проведения вычислений как раз нужны координаты и оси. А как ими вычислять?

Спросим еще раз: с помощью чего определяются положения различных городов, стран и континентов? Конечно, с помощью карт. Географические карты – величайшее изобретение. Карты позволяют вычислить расстояния и направления, которые иначе пришлось бы измерять непосредственно на местности, которая не всегда позволяет это сделать.

Простейшая карта нами была построена на предыдущем уроке. Но это для случая, когда на деревне одна улица… А если их две и они взаимно перпендикулярны?

В самом деле, что делать, если тело расположено в стороне от известного направления?

Прежде всего, отметим, что тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь, называется *материальной точкой* или просто точкой.

Пусть точка А находится в стороне от оси ОХ (рис. 61). Как описать ее положение, как вычислить ее координату?

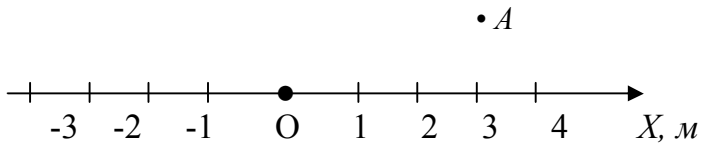


Рис. 61

Нам известно, откуда считать: начало отсчета – «О». Нам известно одно направление – ОХ. Но направление на точку А не совпадает с направлением ОХ. Что делать?

Вариант 1-ый. Построим еще одну ось с началом отсчета в точке «О», но направленную перпендикулярно первой оси. Пусть это будет ось ОУ (рис. 62).

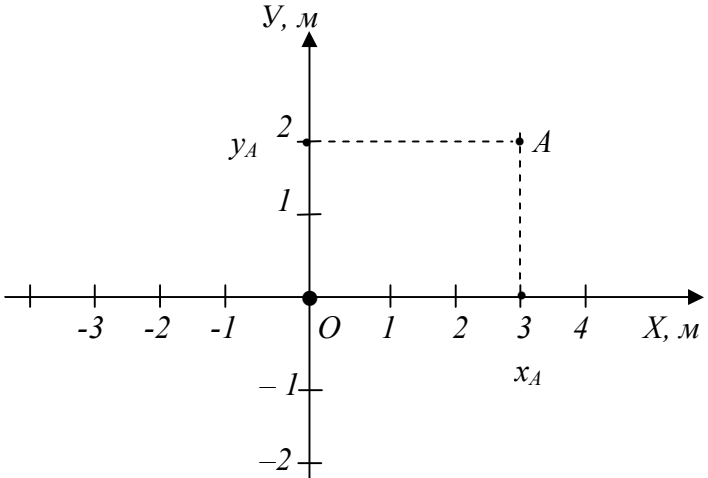


Рис. 62

Отрезки на осях между началом отсчета и проекциями данной точки на эти оси и будут координатами данной точки на плоскости.

В нашем случае x_A – координата x точки А. Она еще называется *абсциссой;* y_A – координата y точки А или *ордината*.

Соответственно, $x_A = 3$ *м*, $y_A = 2$ *м*. Координаты точки А записываются следующим образом: А ($x;y$). В нашем случае – А (3;2).

Теперь, попробуем решить задачку.

Задача 1. В прямоугольной системе координат без помощи линейки вычислите расстояние между двумя точками А(1;2) и В(4;6).

Конечно, если бы была линейка, то измерить длину отрезка АВ не составило бы труда. Но по условию задачи линейкой пользоваться нельзя. Воспользуемся системой координат и нашими предыдущими уроками. Вначале построим чертеж, на котором имеют место быть все известные нам термины: координата, начало координат, ось координат, проекции точки.

Нам нужно вычислить расстояние между точками А и В, не используя измерения,

Достроим перпендикуляр, опущенный из точки А на ось ОУ вправо до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки В на ось ОХ. Обозначим точку пересечения буквой С.

У нас получился прямоугольный треугольник АВС.

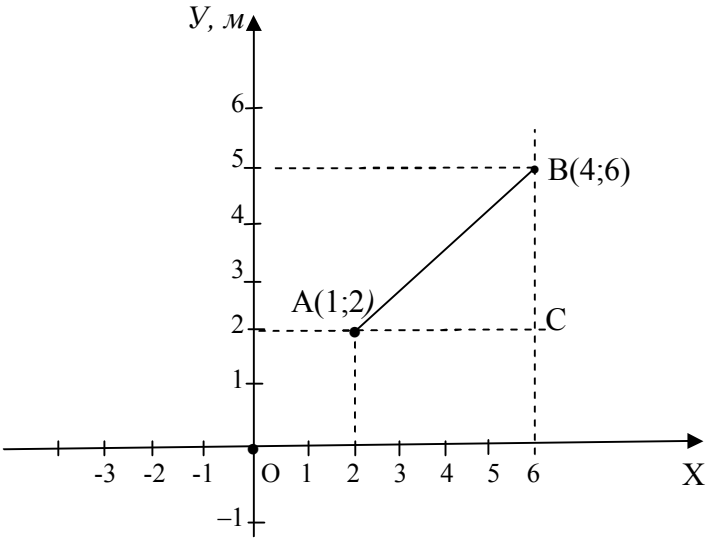


Рис. 63

В треугольнике АВС нам известны длины катетов АС и ВС. Они соответственно равны 3 *м* и 4 *м*.

По теореме Пифагора,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

Следовательно, $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (*м*).

Задачка решена.

Но это графический способ решения. А можно ли обойтись без построения чертежа?

Из рисунка видно, что длина катета АС равна разности координат x_B и x_A.

Следовательно, $AC = x_B - x_A$.

Аналогично, для катета ВС:

$BC = y_B - y_A$.

Теперь можем записать универсальную формулу для вычисления расстояния между двумя точками с известными координатами:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

Итак, если нам известны координаты двух точек, мы можем *вычислить* расстояние между ними. Причем, двумя способами: графически и алгебраически.

Вывод: система координат позволяет вычислять параметры, которые непосредственно измерить трудно или невозможно, с помощью параметров, которые измерить легко.

Вариант 2-ой. Соединим отрезком начало отсчета с точкой А. Мы можем измерить длину этого отрезка и угол между ним и осью ОХ.

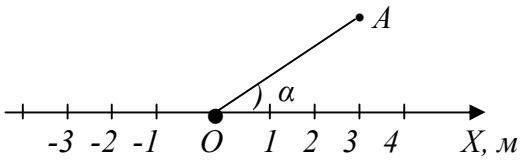


Рис. 64

Здесь положение тела может быть описано следующим образом: точка А находится на расстоянии ОА от начала отсчета под углом α к известному направлению.

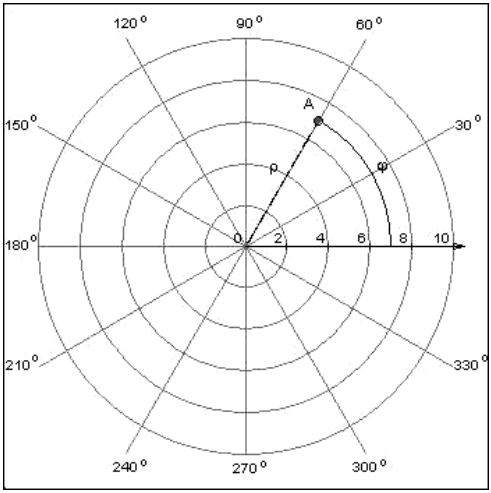


Рис. 65

Здесь начало отсчета «О» называется полюсом. Положение тела определяется расстоянием от полюса до точки и углом между известным направлением и направлением на точку, измеренным против часовой стрелки.

Данная система координат называется *полярной*.

Итак, у нас есть два варианта описания положения тела в пространстве: 1-ый – с помощью прямоугольной (или Декартовой) системы координат; 2-ой – с помощью полярной системы координат.

А что делать, если координаты тела изменяются?

Урок 37, на котором параметр превращается в коэффициент

Как описать положение тела, если его координаты изменяются?

Задав этот вопрос, спросите, все ли слова в нем ребенку понятны?

Описание ему знакомо. Координата – тоже! Он смело скажет, что все понятно.

Теперь спросите, а что такое изменение?

– Ну, изменение – это когда что-то меняется…

– У нас правило: в определении не должно быть слова, однокоренного с определяемым термином.

–…?

– У тебя было пять яблок, стало семь. Чему равно изменение количества яблок?

– Двум!

– Верно. У тебя было семь яблок, стало пять. Чему равно изменение количества яблок?

– Двум!

– Опять двум? Хорошо. У тебя количество яблок изменилось на два. Больше их стало или меньше?

– Ну, в первом случае – больше, а во втором – меньше.

– А если нам неизвестны предыдущие случаи? Например, тебе сообщили, что твой счет в банке изменился на миллион рублей. Денег стало больше или меньше? Радоваться или огорчаться?

–…?

Изменения происходят только во времени. Время имеет только одно направление. Поэтому для нас имеют смысл фразы «было» и «стало».

Изменением величины называется разность между последующим и начальным его значениями.

Было пять, стало семь. Здесь, начальная величина пять, последующая – семь. Следовательно:

$$7 - 5 = 2.$$

Изменение равно двум.

Было семь, стало пять. Здесь, начальная величина семь, последующая – пять. Следовательно:

$$5 - 7 = -2.$$

Изменение равно минус двум.

Если изменение величины положительно, то она растет, а если отрицательна, то уменьшается.

Следовательно, счет в банке вырос на миллион. Изменение положительно.

Изменение параметра обозначается то же буквой, что и параметр, только перед ним ставится греческая буква дельта (Δ).

Например, изменение координаты x будет Δx.

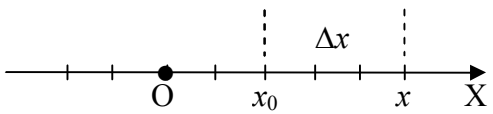


Рис. 66

Если x_0 – начальная координата, а x – конечная, то изменение координаты равно:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Задача заключается в вычислении конечной координаты в любой момент времени.

Будем считать, что за равные промежутки времени, координата меняется на одинаковую величину.

Пусть, за 1 секунду координата меняется на 5 метров. Тогда, легко можно вычислить, какой будет координата через, например, семь секунд. Это 35 м.

Обозначим изменение координаты за единицу времени буквой υ, а интервал времени буквой t.

Тогда, изменение координаты за любой промежуток времени будет:

$$\Delta x = \upsilon \cdot \mathrm{t}.$$

Изменение величины в единицу времени называют скоростью изменения величины или просто скоростью. (Буква – первая буква английского *velocity* – скорость, а t – соответственно, первая буква слова *time* – время).

Δx – буквы, обозначающие величину изменения координаты, т.е., это параметр. Его можно измерить

t – буква, обозначающий промежуток времени, т.е., это параметр. Его можно измерить.

А что такое υ? Тоже параметр, потому что это буква… Но, величину чего она обозначает?

Она обозначает величину одного параметра, приходящуюся на единицу другого. Такие параметры называют **удельными величинами** или **коэффициентами.**

Если тело движется равномерно и прямолинейно вдоль оси OX, то изменение координаты равно перемещению тела. Обозначим величину перемещения буквой S. Тогда, $S = \Delta x$. Значит,

$$S = \upsilon \cdot t.$$

Эта формула нам уже встречалась, когда мы решали задачи на движение. Здесь, υ – коэффициент, который связывает параметры S и t. Он показывает, сколько S приходится на единицу t, т.е. какое перемещение совершает тело за единицу времени.

Например, если скорость автомобиля 60 *км/ч*, это значит, что он проезжает 60 *км* за 1 час. Зная, какой путь он проходит за 1 час, мы может вычислить, какой путь он пройдет за 2 часа, за 5 часов и т.д.

$S = \upsilon \cdot t$ – это основная формула. Из нее можно вывести формулы для вычисления скорости и времени. Для этого просто представим эту формулу как уравнение и решим его вначале для υ. Для этого разделим обе части уравнения на t.

$$\frac{S}{t} = \frac{\upsilon \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} \Rightarrow S/t = \upsilon$$

Теперь решим его для t. Для этого разделим обе части на υ.

$$\frac{S}{\upsilon} = \frac{\cancel{\upsilon} \cdot t}{\cancel{\upsilon}} \Rightarrow S/\upsilon = t$$

Для того чтобы вычислить среднюю скорость движения достаточно весь пройденный путь разделить на время движения. Получим путь, пройденный в единицу времени – удельную величину, которая помогает нам в вычислениях.

Урок 38, на котором аргумент командует функцией

В разговоре с учеником обороните фразу: «Это не моя функция!» или «А у тебя есть аргумент?». Получив любой ответ, спросите, а что такое функция? и что такое аргумент?

Нам знакомы параметры, формулы и уравнения. Пора перейти к функции. Тем более, что мы уже давно ими пользуемся. Надо просто их различить, описать и построить определение.

Вначале дети знакомятся с параметрами. Но параметры для них – величины постоянные, не меняющиеся. Например, параметры в нашей первой формуле для длины окружности $c=2\pi r$. В каждом конкретном случае параметры c и r имеют только по одному значению, т.е. для данной окружности эти величины постоянные.

Но мы уже познакомились с изменяющимися величинами. Например, с изменением координаты с течением времени.

Параметры, обозначающие изменяющиеся величины, называют **переменными параметрами** или просто **переменными**.

При этом различают **зависимые и независимые переменные.**

Например, перемещение зависит от времени.

Параметрически это записывалось так:

$$S = \upsilon t$$

Здесь, t (величина времени) – независимая переменная; S (величина перемещения) – зависимая переменная; υ (скорость перемещения) – коэффициент связи.

Зависимая переменная будет называться **функцией**, а независимая – **аргументом.**

Связь между функцией и аргументом в общем виде будет записывать так:

$$y = f(x)$$

Следовательно, в общем виде связь между перемещением и временем будет записываться так:

$$S = f(t)$$

Говорят, перемещение (S) есть функция времени (t). Время (t), здесь – аргумент.

Любая уже известная нам формула может быть переведена в функцию, если заменить в ней постоянные параметры на переменные. Например,

длина окружности зависит от длины радиуса:

$$c = f(r);$$

площадь квадрата есть функция длины его стороны

$$S = f(a).$$

Наглядно продемонстрировать, как будет изменяться одна переменная, при изменении другой позволит график функции.

Построим график функции $y=2x+3$.

Так как переменная x – аргумент, т.е. независимая переменная, то можем присвоить ей любое значение. А переменная y – функция, т.е. зависимая пере-

менная, ее значение будет зависеть от того, какое значение получит аргумент x.

Например,

если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$;

если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$;

если $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2 + 3 = 7$;

если $x = 3$, то $y = 2 \cdot 3 + 3 = 9$;

если $x = 4$, то $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$;

и т.д.

Построим систему координат.

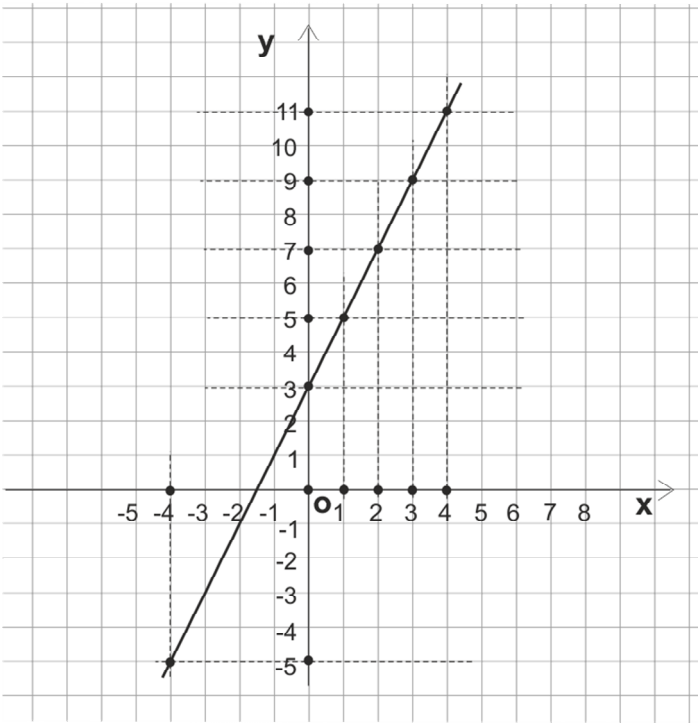


Рис. 67

Мы знаем, что если $x = 0$, то y=3. Отметим эти две точки соответственно на осях ox и oy. Восстано-

вим перпендикуляры к осям из этих точек. Отметим точку их пересечения. В нашем случае, точка пересечения расположена прямо на оси *oy*.

Если $x = 1$, то $y=5$. Отметим эти точки и восстановим к ним перпендикуляры. Отметим точку пересечения этих перпендикуляров.

Точно так же отметим положение точек для случая, когда $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

Теперь соединим получившиеся точки пересечения перпендикуляров. Получилась прямая линия.

Нетрудно заметить, что все точки расположенные на этой прямой соответствуют функции $y=2x+3$.

Например, отметим на графике точку $x= -4$. Восстановим из этой точки перпендикуляр к оси *ox*. Из точки пересечения этого перпендикуляра и нашей прямой, проведем перпендикуляр к оси *oy*. Точка пересечения этого перпендикуляра и оси *oy* даст точку (–5). Она соответствует значению функции, вычисленной по формуле:

$$y=2x+3 = 2\cdot(-4)+3= -5.$$

Поэтому функцию, независимая переменная которой имеет первую степень, называют линейной функцией.

Здесь x – в первой степени. Просто первая степень, как мы знаем, не пишется, так как $x^1=x$. В общем виде линейная функция записывается так

$$y = kx+b,$$

где k и b – любые числа.

Построим график еще одной функции:

$$y = x^2$$

Здесь,

если $x = 0$, то $y = 0^2 = 0$;

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;

если $x = 2$, то $y = 2^2 = 4$;

если $x = 3$, то $y = 3^2 = 9$;

Для удобства построим таблицу значений независимых переменных и соответствующих им значений функций.

x	0	1	2	3	…
y	0	1	4	9	…

Построим систему координат, отметим соответствующие точки и соединим их плавной кривой

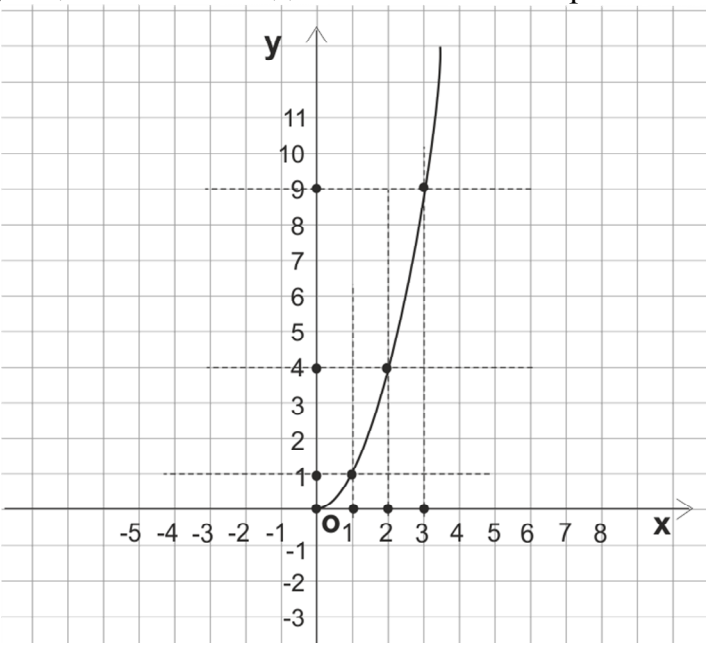


Рис. 68

Теперь присвоим аргументу (независимой переменной) отрицательные значения.

$$y = x^2$$

если $x = -1$, то $y = (-1)^2 = 1$;
если $x = -2$, то $y = (-2)^2 = 4$;
если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$;

x	–1	–2	–3	…
y	1	4	9	…

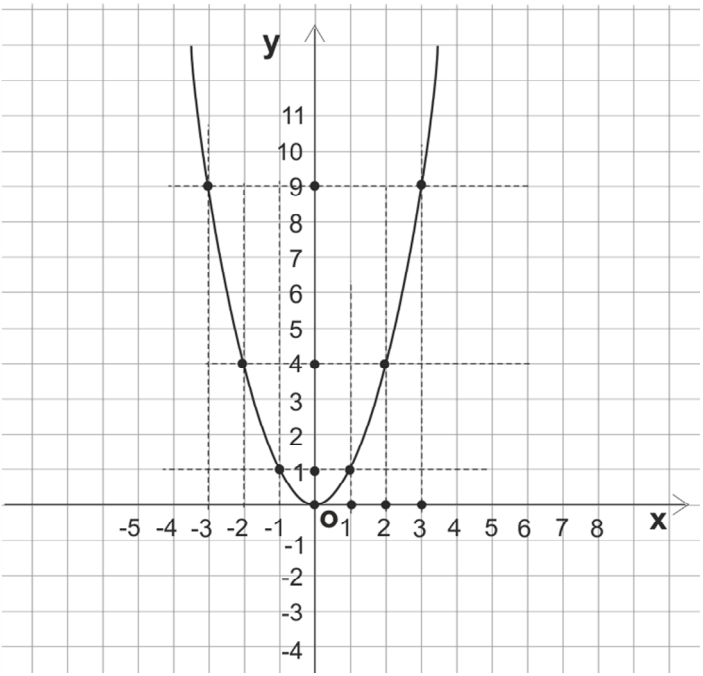


Рис. 69

Это график квадратичной функции. Полученная кривая называется **параболой**. Ветви параболы сим-

метричны относительной прямой, проходящей через ее вершину и параллельную оси *oy*.

В общем виде квадратичная функция записывается так:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где *a, b* и *c* – любые числа, но $a \neq 0$.

При $a = 0$, квадратичная функция обращается в линейную.

Урок 39, на котором анализируем функцию

Итак, функция – параметр, величина которого зависит от другого параметра, аргумента. Описание, как именно меняется функция, называется анализом функции.

Попробуем проанализировать изменение функции по ее графику.

Пусть у нас уже есть график функции $y=f(x)$. Рис. 70.

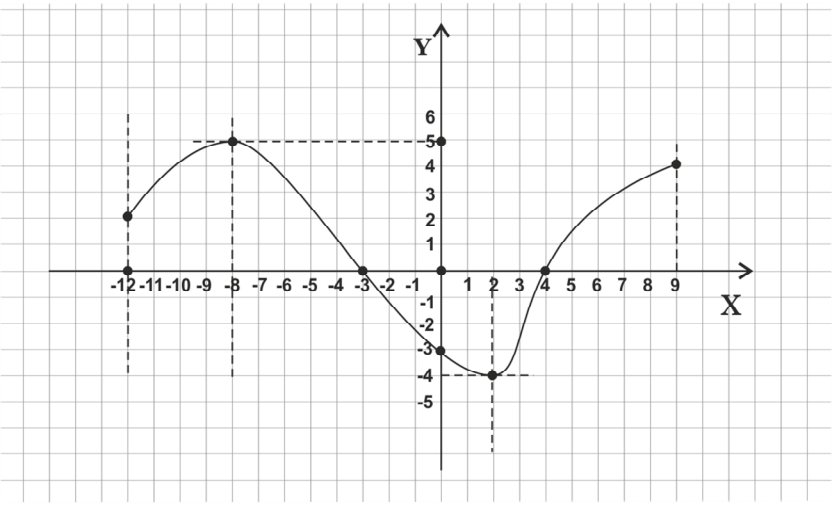


Рис. 70

Сможет ли проанализировать эту функция ваш ребенок? Он, скорее всего, скажет, что нет.

Теперь приведем ряд вопросов, на которые требуется ответить, чтобы составить анализ. На каждый из них в отдельности он сможет ответить.

1. Какова область определения функции? Т.е., в каких пределах значений аргумента x определена функция y?

(В пределах от x=–12, до x=9, или область определения функции: $x \in [-12;9]$).

2. Какова область значений функции? Т.е., в каких пределах лежат значения самой функции? (Значения функции смотрим на оси OY: в интервале от y=–4, до y= 5; область значений функции: $y \in [-4;5]$).

3. Каковы нули функции? В каких точках график функции пересекает ось OX? Т.е., при каких значениях аргумента x функция обращается в ноль?

(Здесь, $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$)

4. В каких точках график пересекает ось OY? Каковы значения функции при равенстве аргумента нулю, т.е. при x=0?

(Здесь, это точка с координатой y=–3).

5. Каково максимальное значение функции?

(y_{max}= 5).

6. Каково минимальное значение функции?

(y_{min}= –4).

7. В каких интервалах значений аргумента, функция не меняет свой знак?

(Таких интервалов три: [–12;–3],[–3;4],[4;9]).

8. В каких интервалах значений аргумента x функция y возрастает?

(Таких интервалов два: [–12;–8], [2;9])

9. В каких интервалах значений аргумента x функция y убывает?

(Такой интервал один:[–8;2]).

Урок 40, на котором график помогает решать неравенства

Изменение аргумента в заданном интервале значений, изменяет значения функции. Значения функции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Причем, изменение знака функции происходит в точке y=0. И, если функция непрерывна, то после изменения знака, например, с минуса на плюс, новое изменение может быть только с плюса на минус.

Рассмотрим график некоторой функции y=f(x), заданной в интервале [x_1; x_5]. Рис. 71.

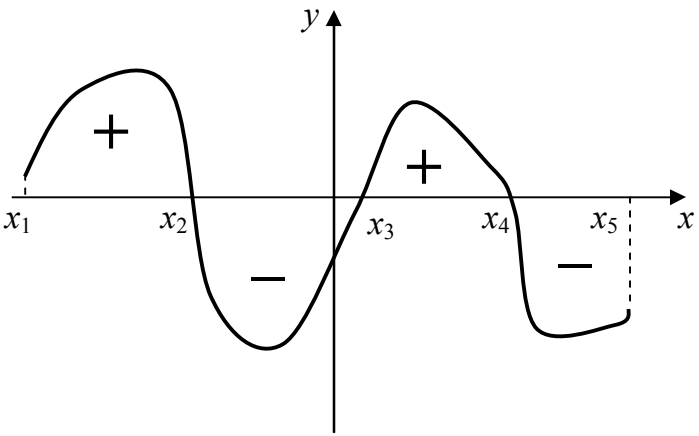


Рис. 71

Здесь, в интервале значений аргумента от x_1 до x_2 функция положительна. Далее, в точке x_2 она меняет знак с плюса на минус и остается отрицательной до значения аргумента, равного x_3. В точке x_3 функция

опять меняет знак, теперь с минуса на плюс, и остается положительной до значения аргумента, равного x_4. В точке x_4 функция меняет знак с плюса на минус.

В точках x_2, x_3 и x_4, где функция меняет знак, значение самой функции равно нулю.

Это обстоятельство поможет продолжить решение неравенств, начатое на одном из предыдущих уроков (стр. 131).

Рассмотрим неравенство:

$$(x-7)(x+3)(x-4) > 0$$

Чтобы получить ее решение, представим это неравенство в виде функции:

$$y = (x-7)(x+3)(x-4) > 0$$

При каких значениях аргумента x, функция y обращается в ноль?

Это значения: $x_1=7$, $x_2=-3$, $x_3=4$.

Именно в этих точках график функции пересекает ось ОХ и, соответственно, функция меняет знак. Обозначим эти точки на оси ОХ. Строить ось ОУ нет необходимости, так как нам не нужны конкретные значения функции y. Нам нужны только интервалы значений аргумента x, в которых значения функции больше нуля.

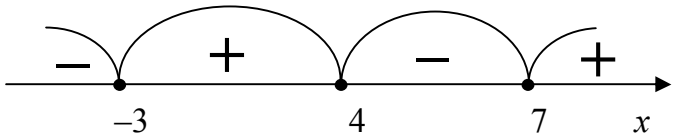


Рис. 72

На чертеже получились четыре интервала. Но, какие знаки у функции в каждом интервале?

Рассмотрим крайний правый интервал. Здесь значения аргумента больше 7. Если подставить в формулу нашей функции значения аргумента x, которые больше 7, то величины во всех трех скобках положительны. Следовательно, в правом крайнем интервале значения функции будут положительны. Значит, справа налево в каждом интервале, знак будет меняться на противоположный (рис. 72).

Таким образом, решением нашего неравенства

$$(x-7)(x+3)(x-4) > 0,$$

будет

$$x \in (-3;\ 4) \cup (7;\ +\infty).$$

Этот метод решения неравенств, называется *методом интервалов*.

Урок 41, на котором тригонометрия связывает стороны и углы треугольника

– Можно ли вычислить длину катета, если измерена длина гипотенуза?

– Конечно! По теореме Пифагора.

– Хорошо. Пусть длина гипотенузы равна 10 *см*. Чему равна длина катета?

– А чему равен второй катет?

– Неизвестно.

– Тогда, длину гипотенузы вычислить нельзя.

– А если известен угол между катетом и гипотенузой?

– Ну, не знаю!

– А чему равен угол между катетами?

– 90°.

– А сумма двух других острых углов?

– Тоже 90°.

– Почему?

– Потому что, сумма углов в треугольнике равна 180°.

– Это надо доказать.

– А как?

– Построим треугольник. Проведем через его вершину прямую, параллельно основанию. Расставим обозначения получившихся углов. Как они называются?

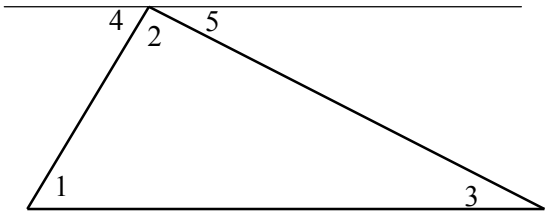


Рис. 73

– Углы 4 и 1 – внутренние накрест лежащие. Они равны. Углы 5 и 3 – тоже.

– А чему равна сумма углов 4, 2 и 5?

– 180°.

– Отлично! А чему равна сумма углов 1, 2 и 3?

– ?

– Замени в первой сумме углы 4 и 5 на равные им углы 1 и 3.

– Получится тоже 180°.

– Доказали!

В прямоугольном треугольнике один угол всегда равен 90°. Следовательно, сумма двух других углов равна:

$$\angle\alpha + \angle\beta = 90°$$

Изменение одного из них всегда приводит к изменению другого. Чтобы это выполнялось, должны меняться и величины катетов и гипотенузы. В свою очередь, изменение длины любого из катетов прямоугольного треугольника приводит к изменению острых углов (α и β) и длины гипотезы.

Рассмотрим каждый случай подробнее.

Пусть катет b будет неизменным. Тогда, любое изменение угла α приведет к изменению длины катета a и гипотенузы c. (Рис. 74).

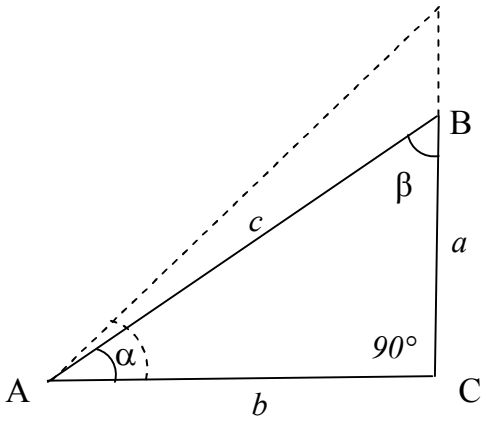


Рис. 74

Теперь, пусть катет *a* остается неизменным. Тогда любое изменение угла α приведут к изменению длин катета и гипотенузы. (Рис. 75).

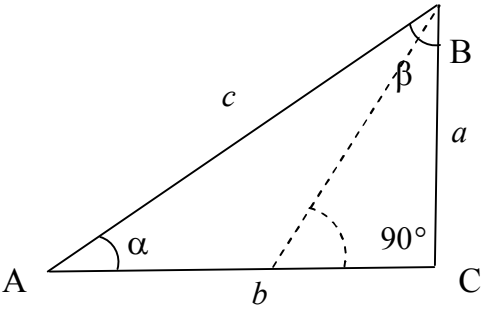


Рис. 75

Таким образом, в прямоугольном треугольнике между острым углом и парой катет-гипотенуза есть какая-то связь.

Отношение длины катета, который лежит напротив данного острого угла, к гипотенузе есть величина,

зависящая от данного угла. Это отношение и называется *синусом* данного угла:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha$$

Это и есть тот самый синус угла, которым пугают детей.

Для всех значений углов синусы вычислены и занесены в специальную таблицу.

Имея под рукой эту таблицу, можно легко *вычислить* величину острого угла прямоугольного треугольника, *измерив* длины катета и гипотенузы: достаточно длину катета разделить на длину гипотенузы и найти в таблице число равное результату этого деления – на той же строчке будет дан угол в градусах.

С помощью той же таблицы можно *вычислить* длину гипотенузы, *измерив* угол и противолежащий ему катет.

Косинусом угла, соответственно, будет называться отношение прилежащего к данному углу катета к гипотенузе.

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha$$

Урок 42, на котором делаем то, что можем делать и не делаем то, что не можем делать

Достаточно теории. Теперь поиграем в задачки. Интересно, чему равен синус угла в 30°.

Ясно, что детям это совершенно не интересно.

А вы сообщите, что для решения этой задачки у них есть все, что нужно. А вот смогут ли они, имея все, решить ее? Это уже вопрос принципа, это соревнование, это доказательство дееспособности. Здесь отказ будет восприниматься как поражение. А проигрывать дети не захотят.

Тем не менее, поставив задачку, нельзя долго ждать и смотреть, как ребенок мучается... Надо ему вовремя помочь. Надо предложить ему поиграть в несколько иную игру: вы ему один раз быстро показываете, как задачка решается, а он должен будет постараться повторить. Если это ему удастся, то он победил на первом этапе. В следующий раз, имея опыт, он уже должен будет все сделать самостоятельно.

Как же эта задачка решается?

Точно так же как и любая другая: надо смело делать то, что умеешь делать и не делать то, что не умеешь делать! Главное, здесь, – смело начинать действовать без раздумий.

Итак, вычислим значение синуса 30°.

Мы знаем, что для любого острого угла в прямоугольном треугольнике

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Следовательно,

$$\sin 30° = \frac{a}{c}$$

Теперь, начертим прямоугольный треугольник и расставим все обозначения. Мы это умеем делать.

Достроим треугольник до прямоугольника и проведем в нем вторую диагональ.

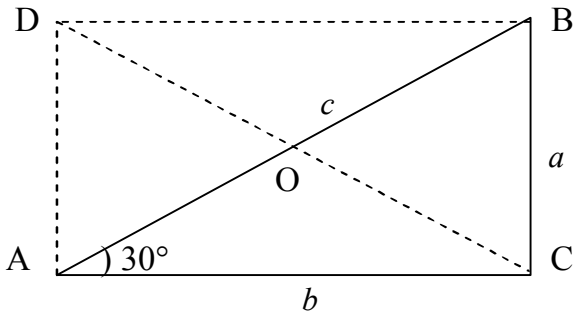


Рис. 76

Это тоже мы умеем делать.

А поможет ли это решению задачи?

Пока не знаем. Но у нас нет иного выхода.

А как мы догадались, что нужно достроить треугольник до прямоугольника? А мы и не догадывались, мы просто сделали то, что можем делать. Ведь мы знакомы с прямоугольником, и ничего иного здесь не сделать.

Точку пересечения диагоналей обозначим буквой O.

Если один острый угол в прямоугольном треугольнике равен 30°, то другой должен быть равен 60° (т.к. их сумма должна равняться 90°).

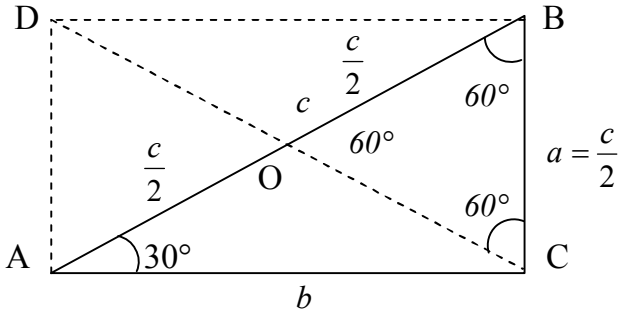


Рис. 77

Диагонали прямоугольника равны друг другу и при пересечении делятся пополам. Значит, отрезок OB равен отрезку OC. Следовательно, треугольник OBC с основанием BC – равнобедренный. А у равнобедренного треугольника углы при основании равны. Следовательно, угол OCB равен углу OBC и равен 60°.

Но если два угла у треугольника по 60°, то и третий угол должен быть равен 60°, чтобы сумма всех углов была 180°.

Если все три угла у треугольника равны друг другу, то и все три его стороны тоже равны друг другу. Значит, BC = CO = OB.

Но, BC = a, а OB = $\frac{c}{2}$.

Следовательно, $a = \frac{c}{2}$.

Подставим это значение в формулу синуса угла.

$$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$$

Итак, $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Следовательно, если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то напротив этого катета будет угол в 30°. И наоборот.

Еще раз пройдите с ребенком всю процедуру вывода. Потом, дайте ему чистый лист, и пусть попробует повторить. Если с первого раза не получится, пусть взглянет на предыдущие записи. Добейтесь, чтобы он смог сделать весь вывод сам.

При этом напомните, что мы просто делали только то, что умеем делать, и не делали то, что не умеем делать. Поэтому любые отговорки, что он этого не умеет делать, не принимаются.

Теперь, пусть сам попробует вычислить значения синуса 60°.

Ясно, что достроить прямоугольный треугольник до прямоугольника он догадается. Но дальше он зайдет в тупик. У него получится, что половине гипотенузы равен не катет *a*, а катет *b*.

В самом деле, применяя тот же подход, что в предыдущей задаче получаем, что теперь равносторонним является треугольник AOB. Следовательно, длина катета *b* равна половине длины гипотенузы.

Но нам нужен катет *a*, а не катет *b*.

Что делать?

Как только прозвучали фразы длина гипотенузы и длина катета, сразу пишем теорему Пифагора для данного треугольника.

А она поможет?

Не знаем. Но мы умеем это делать, поэтому смело делаем. Ничего другого не остается.

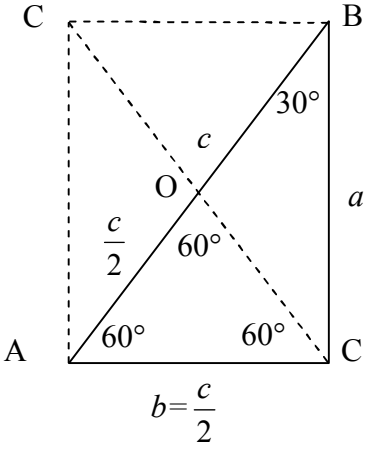


Рис. 78

По теореме Пифагора:

$a^2 + b^2 = c^2$

Подставим $b = \frac{c}{2}$, получим

$$a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2;$$

$$a^2 + \frac{c^2}{4} = c^2 \;;$$

$$a^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} \;;$$

$$a^2 = \frac{3}{4}\, c^2 \;;$$

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}c^2}\ ;$$

$$a = \frac{c}{2}\sqrt{3}\ .$$

Подставим полученное значение a в формулу для синуса угла в 60°.

$$\sin 60° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{\cancel{c}}{2}\sqrt{3}}{\cancel{c}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Итак, мы получили значения синусов двух стандартных углов:

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь, пусть попробует вычислить значение синуса угла в 45°.

Подскажите только, что в данном случае треугольник достраивать до прямоугольника не нужно.

Те же самые выкладки, в качестве закрепления пройденного материала, можно предложить сделать и для косинусов углов соответственно в 30, 45 и 60 градусов.

Получится таблица:

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$

Урок 43, на котором появляются странные треугольники

Интересно, а чему равен синус нуля?

Здесь, конечно, мы лукавим: ребенку это совершенно не интересно. А мы попробуем его заинтересовать. Предложите ему начертить прямоугольный треугольник с острым углом в 0°, с тем, чтобы выяснить, чему равен sin 0°.

Первая же попытка приведет ребенка к выводу, что такой треугольник не существует.

А вы предложите следующий ход рассуждений: если в прямоугольном треугольнике уменьшать острый угол до нуля, то противолежащий ему катет тоже уменьшится до нуля.

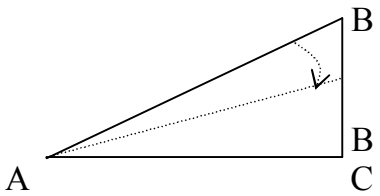


Рис. 79

Получится необычный прямоугольный треугольник:

Рис. 80

Если ребенок заявит, что это – просто отрезок прямой, то скажите, что он удовлетворяет всем признакам треугольника. Здесь угол ACB прямой. Угол ABC – тоже, а угол BAC равен нулю. Сумма всех углов равна 180°. Как и положено для треугольника.

Длина катета AC равна длине гипотенузы AB, а длина катета BC равна нулю.

Синус угла BAC равен отношению длины противолежащего ему катета (BC) длине гипотенузы (AB). Т.к. при угле BAC равном нулю, длина катета BC тоже равна нулю, то и синус этого угла тоже равен нулю. Вот такая геометрия.

Осталось выяснить, чему равен синус угла в 90°.

При неизменном катете BC будем увеличивать острый угол в прямоугольном треугольнике до 90°. Как только это случится, углы при основании станут равны друг другу.

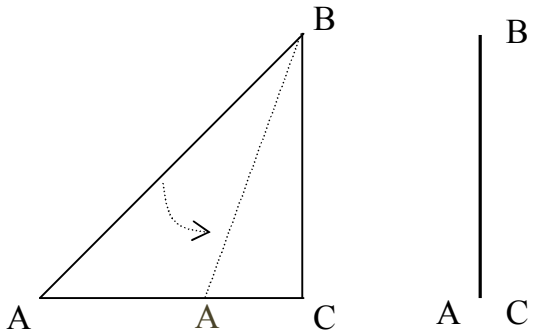


Рис. 81

Получился еще один странный прямоугольный треугольник.

Тем не менее, это прямоугольный треугольник, причем равнобедренный, т.е. противолежащий нашему углу катет станет равен гипотенузе. Их отношение равно 1. Следовательно, синус угла в 90° равен 1.

Теперь пусть ребенок попробует сам вычислить значения косинусов 0° и 90°. Порядок рассуждений ему известен.

Здесь очень важно обратить внимание на то, что рассматривается динамичный процесс и при этом получается статичный результат. Напомните ему, что тот же подход применялся на уроке, посвященном вычислению площади круга: количество сторон вписанного правильного многоугольника стремился к бесконечности (динамичный процесс) и в пределе получалось, что его площадь равна площади круга (статичный результат).

Достроим таблицу значений синусов и косинусов углов:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$	0

Пусть ребенок проанализирует таблицу значений. Он уже достаточно опытен, чтобы заметить некоторую симметричность и сделать выводы.

Теперь воспользуемся его же собственными наблюдениями для определения связи между синуса-

ми и косинусами углов в прямоугольном треугольнике.

В самом деле, в прямоугольном треугольнике синус одного острого угла всегда равен косинусу другого острого угла и наоборот. Это следует из определений синуса и косинуса угла. Пусть этот вывод ребенок попробует сделать сам.

У него должно получиться следующее:

«Синус угла есть отношение противолежащего ему катета к гипотенузе, а косинус угла – отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Так как в прямоугольном треугольнике

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\beta = \frac{a}{c}$,

то $\sin\alpha = \cos\beta$ ».

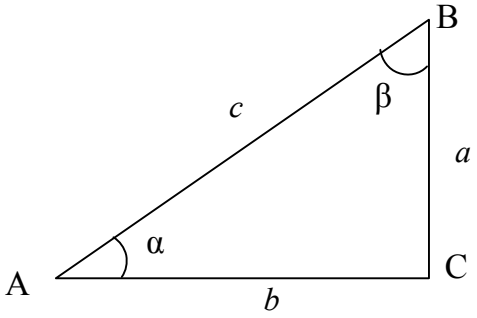


Рис. 82

Если у ребенка получится этот вывод, похвалите его и сообщите, что на основе этого вывода можно вывести замечательную формулу.

Вспомним, что в прямоугольном треугольнике сумма его острых углов равна прямому углу.

$\angle\alpha + \angle\beta = 90°$

Следовательно,

$\angle\beta = 90° - \angle\alpha$.

Теперь запишем полученную выше формулу ($\sin\alpha = \cos\beta$) и заменим в ней $\angle\beta$ на то, чему он равен, т.е. на ($90° - \angle\alpha$).

Получим

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Аналогично,

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

Выразим углы в радианной мере.

Мы знаем, что $90° = \frac{\pi}{2}$ *рад*.

Следовательно,

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Аналогично,

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Урок 44, на котором тригонометрические формулы превращаются друг в друга

Мы рассмотрели отношения катетов к гипотенузе и связали их с соответствующими острыми углами в прямоугольном треугольнике. Аналогично можно вывести связи между отношениями катетов друг другу и соответствующими острыми углами. Так появятся *тангенсы* и *котангенсы* углов.

В прямоугольном треугольнике отношение противолежащего к данному острому углу катета к прилежащему ему катету, называется тангенсом (tg) этого угла.

Обратное отношение называется котангенсом угла (ctg).

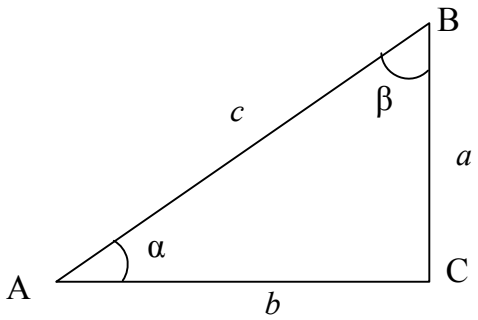


Рис. 83

Следовательно,

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$ и $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$. Значит, $tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$.

Теперь можно решать задачки.

Пусть ребенок попробует выразить тангенс угла через его синус и косинус?

Опять напомните, что все знания, необходимые для решения этой задачки, у него есть. Сумеет ли он ими воспользоваться?

Если нет, то напомните, что просто надо делать то, что можешь делать:

1. Можешь записать формулу для тангенса угла?

$(\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b})$

2. Можешь записать формулу для синуса угла?

$(\sin\alpha = \frac{a}{c})$

3. Можешь вычислить катет b?

$(a = c \cdot \sin\alpha)$

4. Можешь записать формулу для косинуса угла?

$(\cos\alpha = \frac{b}{c})$

5. Можешь вычислить катет b?

$(b = c \cdot \cos\alpha)$

6. Можешь подставить параметры a и b в формулу для тангенса угла.

$(\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\cancel{c} \cdot \sin\alpha}{\cancel{c} \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})$

Итак, отношение синуса данного угла к его косинусу дает тангенс данного угла.

А как мы догадались, что нужно было делать именно это?

Никак. Мы ничего другого здесь не умели. Мы просто делали то, что умели делать.

Скорее всего, на каком-то этапе ребенок сам догадается, как закончить решение. Даже если не догадается, по завершении вывода ему будет ясно, что решение было довольно простым. Он даже может заявить, что догадался бы сам. Вот тут вы ему дайте следующую задачку. Пусть покажет свои способности.

А задачка, вот какая: выявите связь между синусом угла в прямоугольном треугольнике и косинусом этого угла.

Для большинства учеников подобные условия задачи все еще не вполне понятны. Поэтому сформулируем вопрос иначе: какая связь между элементами, из которых состоят синус и косинус угла? Т.е., какая связь между катетами и гипотенузой? Он должен вспомнить про теорему Пифагора. Пусть запишет ее параметрами.

$$a^2+b^2=c^2$$

Как теперь обратить все это в синусы и косинусы? Надо катеты разделить на гипотенузу. Пусть его не смущают квадраты катетов. Разделим левую и правую части этой формулы на квадрат гипотенузы. Получим.

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}.$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Как красиво!

Таким образом, синус угла можно выразить через его косинус следующим образом:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

И наоборот:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Теперь дайте нашему ученику задачу.

Чему равен синус угла, если его косинус равен $\frac{4}{5}$?

Скорее всего, он начнет думать. В этом случае скажите, что думать нельзя. Как только задумался, снижаем на бал оценку. Обычно, когда ребенок не может решить задачу, ему предлагают подумать. Но, думать надо, когда изучаем теорию. При решении задач думать уже поздно.

Сразу пишем $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, подставляем значение косинуса и вычисляем:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Когда есть теория, надо смело действовать.

Урок 45, на котором у синусов и косинусов обнаруживаются свои теоремы

Теорема косинусов.

Для некоторых детей это самые непонятные и потому самые страшные слова. Но мы уже научились рассеивать страхи. Пусть ребенок попробует сам разобраться с этими теоремами. Вы только помогите поставить проблему. К тому же он уже не ребенок, он уже вполне настоящий ученик!

Пусть дан произвольный треугольник.

Две стороны (a и b) и угол (α) между ними удалось измерить.

Спросите еще раз: чем можно измерить длины сторон и чем можно измерить угол?

Третью сторону (c), допустим, измерить не удается… Можно ли вычислить ее длину?

Ясно, что если бы угол между сторонами a и b был равен 90°, то получился бы прямоугольный треугольник, и по теореме Пифагора длина стороны c была бы вычислена.

Но, здесь все углы острые. Треугольник не прямоугольный. Что делать?

Как всегда, будем делать то, что можем делать, и не будем делать то, что не можем.

Начертим треугольник.

Проведем высоту (h) и расставим параметры. Это мы умеем делать.

Получили два прямоугольных треугольника. (Рис. 84).

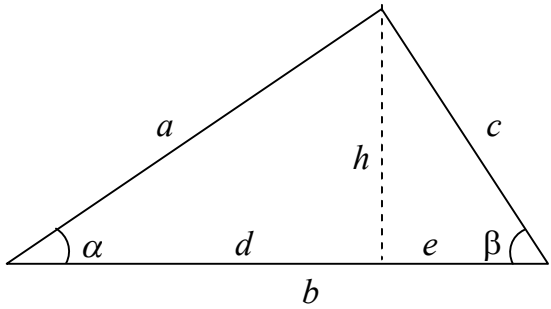


Рис. 84

Нам нужно вычислить длину стороны c. В правом треугольнике:

$$c^2 = h^2 + e^2 \quad \text{(по теореме Пифагора).}$$

Но нам не известны длины e и h.

Вычислить h нам поможет левый треугольник. Он тоже прямоугольный. Углы в этом треугольнике нам известны. Значит, нам известны значения их синусов и косинусов. Следовательно,

$$h = a \sin\alpha$$

Итак, длину высоты мы вычислили. Но нам еще нужно вычислить длину отрезка e. Спросите, как вычислить длину отрезка e, если известны длины отрезков d и b?

Конечно, $e = b - d$.

Величину катета d вычислим с помощью косинуса известного угла в левом треугольнике. Здесь,

$$d = a \cos\alpha$$

Следовательно,

$$e = b - d = b - a \cos\alpha$$

Теперь подставим значение параметров h и e в нашу первую формулу ($c^2 = h^2 + e^2$).

$$c^2 = a^2 \sin^2\alpha + (b - a \cos\alpha)^2$$

Раскрываем скобки (квадрат разности)

$$c^2 = a^2 \sin^2\alpha + b^2 - 2ab \cos\alpha + a^2 \cos^2 \alpha$$

Выносим за скобки общий множитель (a^2) у первого и последнего слагаемых в правой части уравнения.

$$c^2 = a^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2ab \cos\alpha$$

Зная, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получаем

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cos \alpha$$

Мы получили теорему косинусов.

Она гласит: *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без их удвоенного произведения, умноженного на косинус угла между ними.*

Теперь спросите, как изменится полученная формула, если угол α будет равен 90°, т.е. для прямоугольного треугольника?

Он обязательно должен додуматься!

Конечно, получится теорем Пифагора. Следовательно, теорему косинусов можно назвать расширенной теоремой Пифагора.

Итак, длина стороны любого треугольника равна

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

Таким образом, **можно вычислить длину одной стороны треугольника, если известны длины двух других его сторон и угол между ними**.

Мы опять получили формулу, которая позволяет вычислить то, что трудно измерить, с помощью того, что измерить легко.

Задача.

В ΔABC *длина сторона* AC *равна* 7 *см, а стороны BC* – 4 *см. Угол* BAC *равен* 45°. *Вычислите длину стороны* AB.

Рис. 85

Если ученик опять задумался, напомните, что думать нельзя. Надо действовать!

Обозначим параметрами длины сторон и величины углов.

Напомни, что обычно, величины сторон обозначают буквами соответствующими обозначениям противоположных вершин. Пусть AB=c, BC=a, AC=b.

А величины углов, обозначают греческими буквами соответствующими обозначениям вершин. Пусть ∠ ABC= β; ∠BAC=α; ∠ACB =γ

Пишем формулу теоремы косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cos \alpha$$

Подставляем значения параметров:

$$c^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cos 60^\circ$$

$$c^2=28;$$

$$c = 2\sqrt{7}\,.$$

Длина стороны AB равна $2\sqrt{7}$ *см.*

Теорема синусов.

Если известны два угла и длина одной из сторон треугольника, можно ли вычислить длины оставшихся двух его сторон? Ответить на этот вопрос нам поможет теорема синусов.

Построим треугольник.

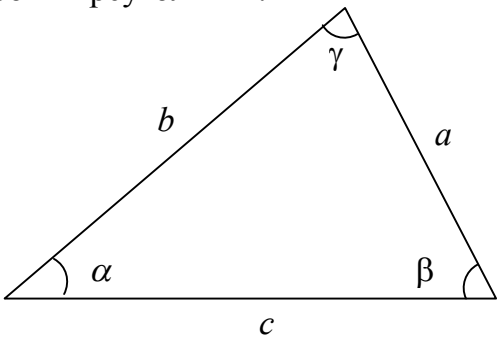


Рис. 86

Пусть нам известны длина основания c и прилежащие к ней углы α и β.

Ясно, что третий угол может быть легко вычислен. Сумма углов в треугольнике равна 180º. Следовательно, $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$.

Как вычислить длины сторон a и b.

Проведем высоту.

Выразим высоту через синусы соответствующих углов.

$h = a \sin\beta$

$h = b \sin\alpha$

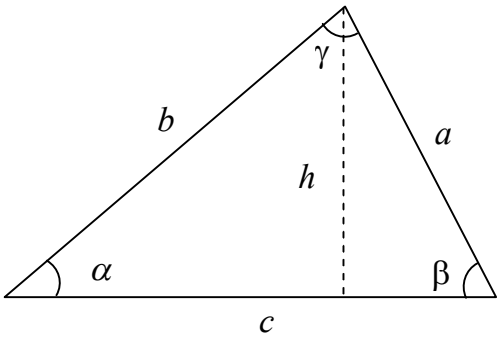


Рис. 87

Так как левые части формул равны, то можем приравнять правые их части:

$$a \sin\beta = b \sin\alpha$$

Разделив левую и правую части на ($\sin\beta \cdot \sin\alpha$), получим:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Добейтесь того, чтобы ученик спросил: а почему мы разделили левую и правую части уравнения на ($\sin\beta \cdot \sin\alpha$)?

Пока мы делали то, что понятно и успешно связали длины двух сторон и величины двух противолежащих им углов. А остальные? Что с ними делать?

Вначале ничего не приходит на ум. Но приходить ничего и недолжно. Надо просто делать то, что умеем. Т.е. продолжаем делать то же самое, только для другой пары сторон и углов.

Если ничего не помогает, спросите, можно ли провести высоту в данном треугольнике по-другому?

Конечно можно!

Давайте, проведем.

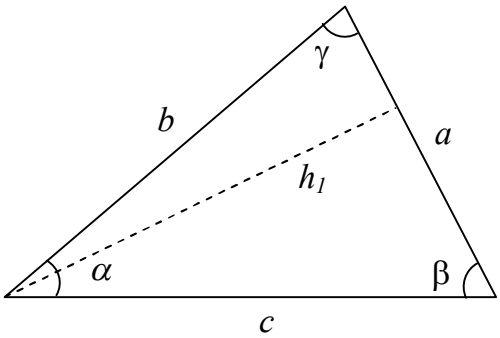


Рис. 88

Выразим высоту h_1 через синусы соответствующих углов β и γ.

$$h_1 = b \sin\gamma$$

$$h_1 = c \sin\beta$$

Так как левые части формул равны, то можем приравнять правые их части:

$$b \sin\gamma = c \sin\beta$$

Разделив левую и правую части на $(\sin\gamma \cdot \sin\beta)$, получим:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Но, выше мы получили другое равенство отношений. Напомним его:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Это и есть теорема синусов. Она гласит: *отношения длин сторон и синусов противолежащих им углов треугольника пропорциональны.*

Следовательно, **если нам удалось измерить одну сторону треугольника и два его угла, то длины двух других сторон можно вычислить.**

Задача.

В ΔABC *длина стороны* AC *равна* 7 *см. Угол* ABC *равен* 30°*, а угол* BAC *равен* 45°*. Вычислите длину стороны* BC.

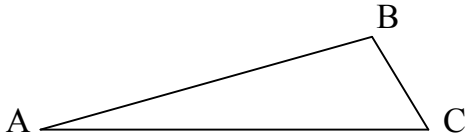


Рис. 89

Если наш ученик опять задумался, напомните, что думать нельзя. Надо действовать!

Обозначим параметрами длины сторон и величины углов.

Напомним еще раз, что обычно, величины сторон обозначают буквами соответствующими обозначениям противоположных вершин. Пусть AB=c, BC=a, AC=b.

Величины углов, обозначают греческими буквами. Пусть ∠ ABC= β; ∠BAC=α; ∠ACB =γ

Пишем формулу теоремы синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Нам нужно только первое равенство. Подставляем в нее значения параметров:

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{7}{\sin 45^\circ};$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

Чтобы избавиться от знаменателя в левой части, умножим обе части уравнения на $\frac{1}{2}$ и получим

$$a = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Длина стороны ВС равна $\frac{7}{\sqrt{3}}$ *см*

Урок 46, на котором знакомимся с формулами приведения

А что делать, если угол больше 90°? Например, чему равен синус 150°?

А разве может быть синус угла, который больше 90°? Ведь, в этом случае исчезает прямоугольный треугольник. А определение синуса и косинуса угла мы давали исходя из того, что треугольник прямоугольный. Что делать?

Надо получить новое определение синуса и косинуса угла.

Здесь нам на помощь придет система координат.

Начертим окружность с центром в начале координат и радиусом равным единице. Между радиусом и осью OX угол α.

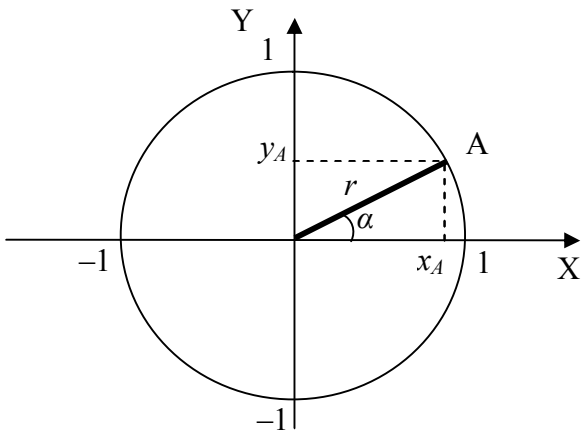


Рис. 90

Опустим перпендикуляры из точки А на ось ОХ и ось ОУ. Получились два прямоугольных треугольника. Катет, противолежащий углу α, равен ординате y_A, т.е. координате y_A. А прилежащий ему катет есть координата x_A.

Синус угла α равен отношению противолежащего катета к гипотенузе или отношению координаты y точки А к величине радиуса (r), т.е.

$$\sin\alpha = \frac{y_A}{r}.$$

Соответственно, косинус угла α равен отношению координаты x точки А к радиусу (r), т.е.

$$\cos\alpha = \frac{x_A}{r}.$$

В тригонометрическом круге длина радиуса равна 1, т.е. $r = 1$.

Следовательно,

$\sin\alpha = y$;

$\cos\alpha = x$.

Эти выводы универсальны и подходят для вычисления синусов и косинусов любых углов.

Теперь, повернем радиус r против часовой стрелки еще на 90 градусов.

Получим тупой угол, равный (α+90°).

При повороте единичного радиуса на угол (α+90°), новые координаты его конца будут соответственно x_B и y_B.

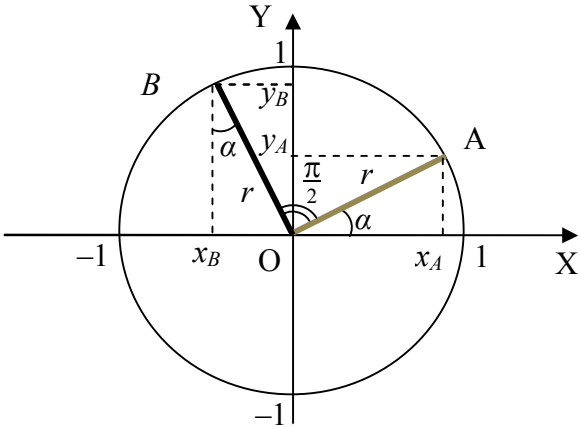


Рис. 91

И что дальше?

Дальше, опят делаем только то, что можем делать. Будем сравнивать полученные прямоугольные треугольники. Ничего другого не остается. Напомните, мы это делаем, не потому что мы заранее знали, что именно это надо делать. Мы просто должны получить хоть какой-то результат, чтобы решить, как быть дальше. Иначе, все будет стоять.

Прямоугольных треугольников, здесь, четыре и у всех равные гипотенузы. Следовательно, они равны. Длины катетов этих прямоугольных треугольников представляют собой модули соответствующих координат. А координаты связаны между собой.

Очевидно, что

$x_A = y_B$.

$y_A = -x_B$ (т.к. координата x_B отрицательна);

Спросите, почему во втором равенстве появился минус?

Потому что координата x_B отрицательна.

Ученик скажет, что это понятно.

Проверьте, пусть объяснит. Ведь на чертеже перед координатой x_B нет минуса.

Напомните, x_B – параметр, обозначающий величину координаты. Эта величина, здесь, отрицательна. Например, $x_B = -0{,}7$ (см). А величина координаты y_A – положительна. Например, $y_A = 0{,}7$ (см). Если приравняем эти координаты ясно, что $0{,}7 \neq -0{,}7$. Поэтому перед одним из параметров надо поставить знак минус, чтобы равенство выполнялось.

Дальше, запишем все возможные тригонометрические формулы для угла α.

$y_A = \sin\alpha$; $\quad -x_B = \sin\alpha$;

$x_A = \cos\alpha$; $\quad y_B = \cos\alpha$.

Т.к. мы сказали, что косинусу угла между единичным радиусом и осью OX равен координате x его конца, то будем считать, что

$\cos(\alpha+90^\circ) = x_B$

Напомним, что это только для единичного радиуса.

Соответственно,

Осталось сделать замену:

$\cos(\alpha+90^\circ) = x_B = -y_A = -\sin\alpha$

$\sin(\alpha+90^\circ) = y_B = y_B = \cos\alpha$

Окончательно получили:

$\cos(\alpha+90^\circ) = -\sin\alpha$

$\sin(\alpha+90^\circ) = \cos\alpha$

Запишем полученные формулы, заменив градусную меру радианной.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha\ ;$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha .$$

Это – так называемые, формулы приведения.

Имеется в виду, приведение тригонометрических функций углов, которые больше 90 градусов, к функциям углов, которые меньше 90 градусов.

Мы получили нужные формулы!

А как мы догадались, что уже получили нужные формулы?

В левой части формул синус и косинус угла, который больше 90º, а в правой – синус и косинус угла, который меньше 90º.

Как же их применять?

Просто!

Например, вычислим, чему равен синус 150º?

Угол в 150 градусов можно представить как сумму углов в 90° и 60°. Следовательно,

$$\sin 150° = \sin (90°+60°) = \cos 60° = 0,5.$$

В радианной мере угла

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin (\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5.$$

Обратим еще раз внимание на то, что координаты конца радиуса могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, значения синусов и косинусов тоже могут быть как положительными, так и отрицательными. Ведь длина радиуса всегда положительна.

Итак, в отношениях $\frac{y_A}{r}$ и $\frac{x_A}{r}$ знаменатель всегда положителен. А числитель меняет знак в соответствии с величиной угла α.

Для запоминания знака окружность делят на четыре четверти, обозначая их римскими цифрами от положительного значения оси OX против часовой стрелки.

Первая четверть (I): углы от 0° до 90°.

Здесь, координаты x и y точек дуги окружности положительны. Следовательно, синусы и косинусы углов между радиусами, проведенными к этим точкам и осью OX здесь положительны.

Вторая четверть (II) – от 90° до 180°.

Здесь, координаты y положительны, а координаты x отрицательны. Следовательно, значения синусов углов в интервале от 90° до 180° положительны, а значения косинусов – отрицательны.

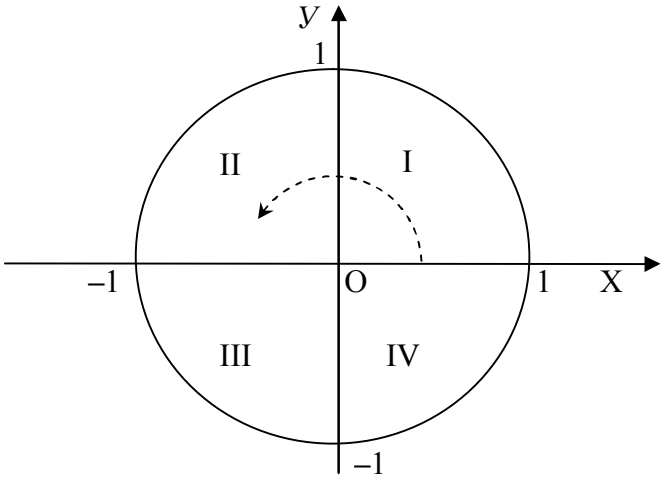


Рис. 92

Третья четверть (III) – от 180° до 270°.

Здесь, координаты *y* и координаты *x* отрицательны. Следовательно, значения синусов и косинусов углов в интервале от 180° до 270° отрицательны.

Четвертая четверть (VI) – от 270° до 360°.

Здесь, координаты *y* отрицательны, а координаты *x* положительны. Следовательно, значения синусов углов в интервале от 270° до 360° отрицательны, а значения косинусов – положительны.

А что делать, если угол больше 180°?

Например, чему равен синус угла в 210°?

Во-первых, отметим, что этот угол попадает в третью четверть. Следовательно, и синус, и косинус этого угла будут отрицательны.

Угол в 210° можно записать в виде суммы (90°+90°+30°).

Следовательно,

$\sin 210° = \sin (90°+90°+30°)$.

Применим формулу приведения

$\sin (90°+(90°+30°) = \cos (90°+30°) =$

$= -\sin 30° = -1/2$.

В общем виде, формула приведения для углов больше чем 180°, запишется так:

$\sin (180°+\alpha) = -\sin \alpha$

$\cos (180°+\alpha) = -\cos \alpha$

Запишем полученные формулы, заменив градусную меру радианной.

$\sin (\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos (\pi+\alpha) = -\cos \alpha$.

Для углов, которые больше 360°, просто отнимаем период, например,

$\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha$

Запишем полученные формулы, заменив градусную меру радианной.

$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$.

Это алгебраические выводы.

А как представить на чертеже углы, которые больше 180° или даже 360°? И что такое период?

Урок 47, на котором появляются витки и обороты

Постройте угол и предложите его измерить. Имея под рукой транспортир, это нетрудно сделать. А удастся ли правильно озвучить или записать результат этого измерения? Вопрос вначале покажется немного странным. Но, тем не менее, ученик смело ответит.

– Конечно, удастся. Вот приложили транспортир и угол измерен. Он равен тридцати градусам.

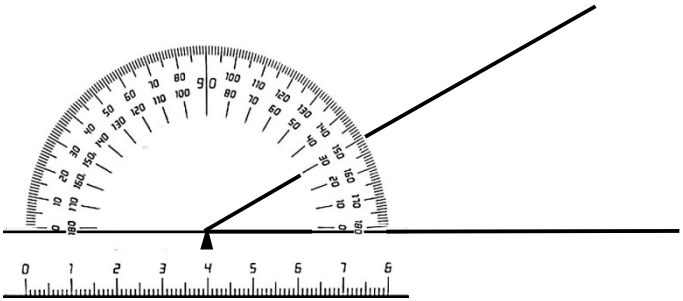


Рис. 93

– Да, но это только острый угол.

– Ой, да, есть еще тупой угол. Он равен 150°.

– Разве? Убери транспортир. Видишь? Тупого угла, равного 150°, на чертеже нет.

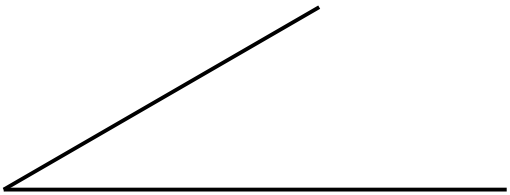


Рис. 94

Заменим транспортир.

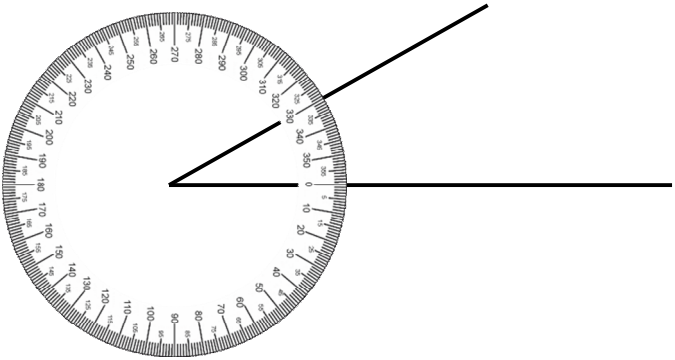


Рис. 95

– В самом деле! Есть угол в… 330°.

– Верно. И все? Больше углов нет?

– Кажется, нет!

– В том то и дело, что кажется. Посмотри внимательнее. Их там очень много.

Дети вначале приучаются различать только острые углы. Потом они начинают видеть и углы тупые, т.е, углы больше 90°. Только что заметили, что есть углы больше 180°. Теперь надо показать, что есть углы больше 360° и меньше 0°.

Рассмотрим циферблат часов.

Мы знаем, что сутки начинаются в 0 часов. В этот момент обе стрелки, и минутная, и часовая, показывают 12.

На сколько градусов повернется минутная стрелка в течение часа?

Ровно на 360 градусов, т.е. она сделает один полный виток. Количество градусов в одном витке называется периодом.

А за 2 часа? Ясно, что еще на 360 градусов. Итого, на 720 градусов. Это уже два полных витка (периода).

А если пройдут 3 часа? Тогда, на 1080 градусов. Это три периода.

Когда минутная стрелка делает один оборот, часовая стрелка поворачивается на одну двенадцатую часть окружности, т.е. показывает, что прошел ровно 1 час. Следовательно, если часовая стрелка указывает на 7 часов, то минутная совершила семь оборотов, т.е. повернулась на $7 \times 360° = 2520$ градусов.

Удалим часовую стрелку. Оставим только минутную. На сколько градусов она сейчас повернута от нуля?

Рис. 96

Этого нельзя сказать точно. Потому что, это может быть и 0°, и 360°, и 2520°, и … любой другой угол

кратный 360°. Множество значений этого угла есть 360°·n, где n – целые числа.

В радианной мере этот угол равен $2\pi n$, где n – целое число.

Рассмотрим еще раз тригонометрический круг. Построим радиус. Пусть угол между радиусом и осью OX будет α. Чему может равняться этот угол, если измерение его транспортиром показало 30°?

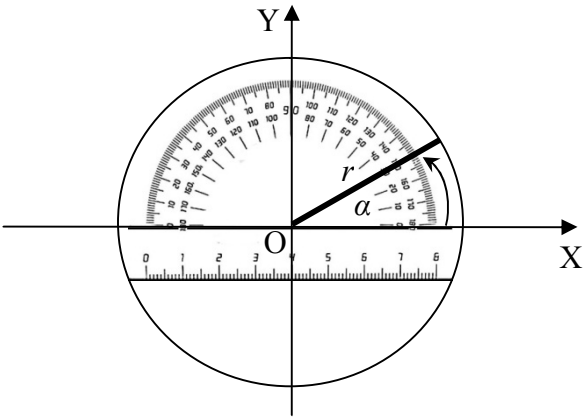


Рис. 97

Ясно, что $\angle\alpha = 30°$.

Точно так же верно, что $\angle\alpha = 390°$, (т.е. 30° + 360°). А может оказаться, что $\angle\alpha = 750°$ и т.д. Все множество возможных значений этого угла можно записать так:

$\angle\alpha = 30° + 360°\cdot n$, где n – целые числа.

Здесь, 360°– период. А n – количество периодов.

В радианной мере результат будет такой:

$\angle\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, где n – целые числа.

В радианной мере, период равен 2π (т.е. 6,28 *рад*.)

Причем, это если радиус поворачивался против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении.

А чему будет равен угол между радиусом и осью OX, если радиус поворачивался по часовой стрелке?

Урок 48, на котором появляются отрицательные углы

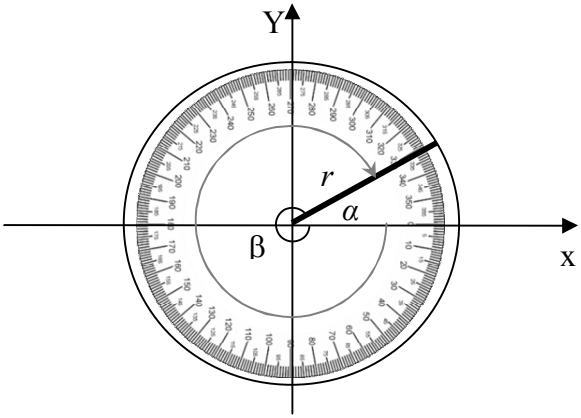


Рис. 98

Угол, отмеренный в противоположном направлении (по часовой стрелке), будет отмечаться знаком минус, т.е. он будет отрицательным.

В нашем случае, обозначим величину угла параметром β.

Ясно, что $\angle\beta = -330°$. Но, точно так же, верно, что $\angle\beta = -690°$, (т.е. $-330°+(-360)$), и т.д.

Все множество возможных значений угла можно записать так:

$\angle\beta = -330° - 360°\cdot n$, где n – целые числа.

Выразим угол β через угол α:

$\angle\beta = \alpha - 360°\cdot n$

А можно ли записать все возможные значения углов одной строчкой?

Конечно, можно.

Пусть α – параметр обозначающий величину угла между осью OX и радиусом, измеренную транспортиром. Тогда все возможные значения углов можно записать так:

$\alpha + 2\pi n$, где n – все целые числа.

Но у нас точно такое же выражение было и для положительных углов.

Совершенно верно. Но в предыдущем случае мы говорили, что n – целые числа. Под целыми числами ученик обычно понимает только положительные числа. Теперь, отметим, что n – все целые числа, имея в виду, положительные, отрицательные и ноль.

Для обозначения всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) используют параметр Z.

Следовательно, окончательная запись всех возможных значений угла между радиусом и осью OX на данном рисунке, будет:

$\alpha + 2\pi n$, $(n \in Z)$.

Напомним еще раз. На тригонометрическом круге положительные углы отмеряют против часовой стрелки: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 2\pi, \ldots$

Отрицательные углы отмеряют по часовой стрелке: $0, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}, -2\pi, -\frac{5\pi}{2}, -2\pi, \ldots$

Урок 49, на котором появляются синусы и косинусы всех возможных углов

Рассмотрим еще раз тригонометрический круг.

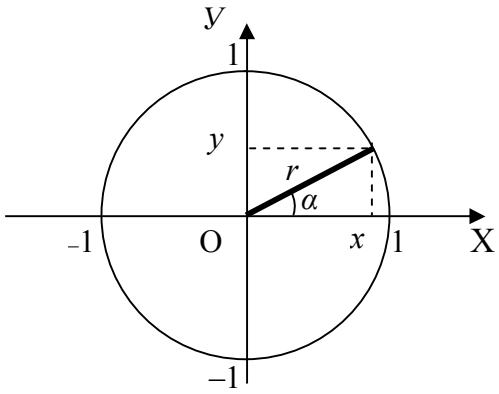


Рис. 99

Здесь, угол между радиусом r и осью OX равен $\alpha + 2\pi n$, ($n \in Z$).

Мы знаем, что синус этого угла для любых значений $n \in Z$, равен координате y конца радиуса, а косинус – координате x.

Следовательно,

$\sin\ (\alpha + 2\pi n) = \sin\ \alpha;$

$\cos\ (\alpha + 2\pi n) = \sin\ \alpha$

Это видно на чертеже.

Так как $2n$ – четное число для любого $n \in Z$, то можем сказать, что данное равенство справедливо для любого четного количества π.

Например,

$\sin(\alpha + 8\pi) = \sin\alpha;$
$\cos(\alpha + 8\pi) = \sin\alpha$

А для нечетного?

Так как $(2n+1)$ – нечетное число для любого $n \in Z$, то

$\sin(\alpha + (2n+1)\pi) = -\sin\alpha$
$\cos(\alpha + (2n+1)\pi) = -\cos\alpha$

Покажем это на тригонометрическом круге.

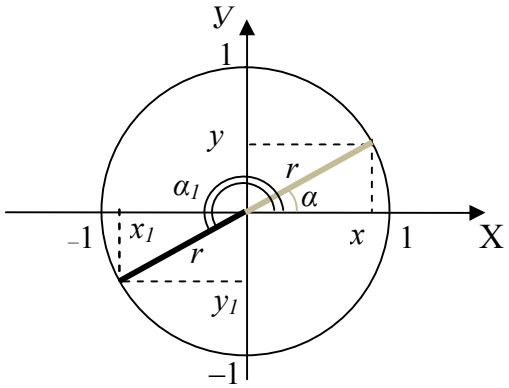


Рис. 100

Здесь, $\alpha_1 = \alpha + \pi$.

Или, для всех значений углов между данными радиусами и осью OX, можно записать:

$\alpha_1 = (\alpha + 2\pi n) + \pi = (\alpha + (2n+1)\pi)$.

Значит,

$\sin\alpha_1 = \sin(\alpha + (2n+1)\pi)$.

Но, на чертеже видно, что синус угла α_1 равен координате y_1. А координата y_1, в свою очередь, равна координате y с противоположным знаком. А координата y равна синусу угла α. Следовательно,

$\sin \alpha_1 = \sin(\alpha + (2n+1)\pi) = y_1 = -y = -\sin \alpha.$

Или, для нечетного количества π

$\sin(\alpha + (2n+1)\pi) = -\sin \alpha.$

Точно так же и для косинуса угла α_1.

$\cos(\alpha + (2n+1)\pi) = -\cos \alpha.$

Например,

$\sin(\alpha + 5\pi) = -\sin \alpha;$

$\cos(\alpha + 5\pi) = -\cos \alpha.$

В самом деле, угол $(\alpha + 2\pi n)$ расположен в I-ой четверти, а угол $\alpha + (2n+1)\pi$ – в III-ей. А мы знаем, что в первой четверти значения синусов и косинусов углов положительны, а в третьей – отрицательны.

Урок 50, на котором появляются тригонометрические уравнения

Можно ли вычислить величину угла, если известно значение синуса этого угла?

Скорее всего, можно.

Пусть $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Чему будет равен угол α?

Ясно, что $\angle\alpha = 30°$.

Возможны ли еще значения?

Мы уже знаем, что да. Надо добавить витки, т.е. периоды. Следовательно, для нашего случая

$\angle\alpha = 30° + 2\pi n, \quad (n \in Z)$

Кажется, все верно. Но давайте проверим результат с помощью тригонометрического круга. Значение синуса угла наклона единичного радиуса к оси OX на тригонометрическом круге, равно координате Y конца этого радиуса. В нашем случае, эта координата равна одной второй.

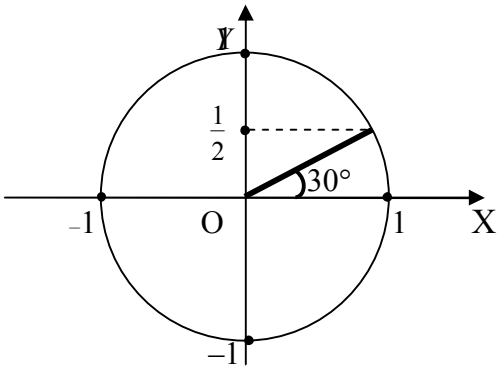


Рис. 101

Но, координату Y, равную одной второй, имеет конец еще одного радиуса. Этот радиус образует с осью OX тупой угол.

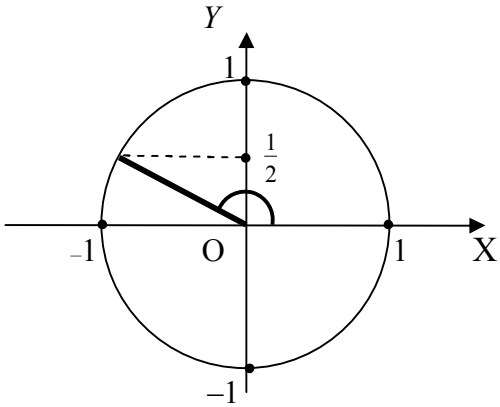


Рис. 102

Что делать?

Надо записать второй корень уравнения.

А как его записать?

Рассмотрим оба угла на одном чертеже. Здесь пунктирная линия, проходящая через значение синуса угла и параллельная оси OX, называется линией синуса.

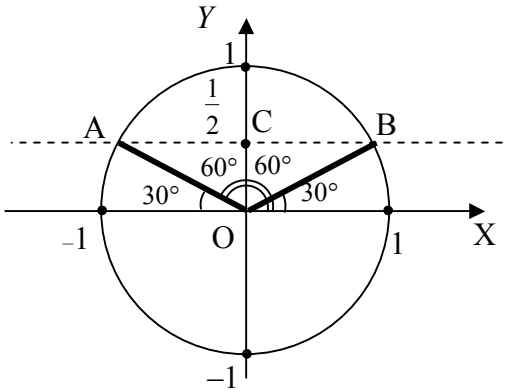


Рис. 103

Угол между радиусами равен 120°. Очевидно, что угол между осью OX и радиусом OA будут равен 120° + 30° = 150°. Или 180° – 30° = 150°.

Следовательно, угол, синус которого равен одной второй, есть угол и в 150°. Это второй корень уравнения.

Итак, у нашего уравнения два корня:

$\angle\alpha = 30° + 2\pi n$ и $\angle\alpha = 150° + 2\pi n$.

А как записать решение в общем виде?

Пусть, $\sin\alpha = t$. Корнями этого уравнения являются следующие углы:

$\alpha = \arcsin t + 2\pi n$

и

$\alpha = (\pi - \arcsin t) + 2\pi n$

Арксинусом (arcsin) числа (t) называется угол, синус которого равен этому числу (t).

А нельзя ли записать решение данного уравнения в одну строчку?

Конечно, можно.

$$\alpha = (-1)^n \arcsin t + \pi n, \quad (n \in Z).$$

Что это значит?

Давайте применим эту формулу для нашего частного случая.

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad (n \in Z).$$

или

$$\alpha = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad (n \in Z).$$

Если n=0, тогда $\alpha = (-1)^0 \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{6}$;

или в градусах $\alpha = (-1)^0\, 30° + 180° \cdot 0 = 30°$.

Если n=1, тогда $\alpha = (-1)^1 \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$;

или $\alpha = (-1)^1\, 30° + 180° \cdot 1 = -30° + 180° = 150°$.

Если n=2, тогда $\alpha = (-1)^2 \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{13\pi}{6}$;

или $\alpha = (-1)^2\, 30° + 180° \cdot 2 = 30° + 360° = 390°$,

и т.д.

Теперь, пусть наш ученик сам попробует проделать те же операции для отрицательных значений переменной n.

А как вычислить величину угла, если известно значение косинуса угла?

Пусть,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Мы знаем, что косинус 60° равен одной второй. Следовательно, первый корень у нас уже есть.

$$\alpha = 60° + 2\pi n, \ (n \in Z).$$

Чтобы вычислить второй корень, рассмотрим тригонометрический круг.

Косинус угла равен координате x конца единичного радиуса. Т.к. косинус нашего угла равен одной второй, то проведем линию косинуса через координату $x = \frac{1}{2}$

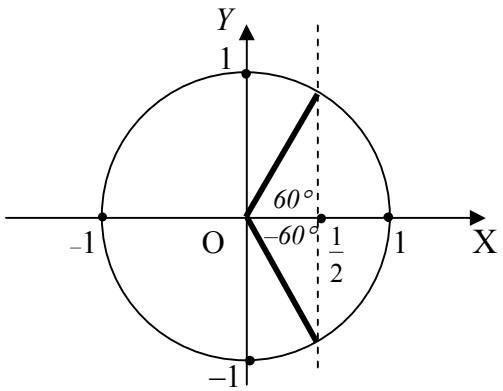


Рис. 104

На чертеже видно, что значение $\frac{1}{2}$ имеют косинусы двух углов: 60° и –60°.

Следовательно, второй корень:

$\alpha = -60° + 2\pi n$, $(n \in Z)$.

Запишем решение уравнения одной строкой:

$\alpha = \pm 60° + 2\pi n$, $(n \in Z)$.

В общем виде, решение уравнения $\cos \alpha = t$, будет:

$\alpha = \pm \arccos t + 2\pi n$, $(n \in Z)$.

Арккосинусом (arccos) числа (t) называется угол, косинус которого равен этому числу (t).

Урок 51, на котором решение тригонометрических уравнений ставится в рамки

Допустим, к решению тригонометрических уравнений предъявляются дополнительные условия. Например, пусть требуется выделить только углы, расположенные в заданном интервале.

Например, требуется решить уравнение

$$\sin\beta = \frac{1}{2}$$

Дополнительно, из всего множества решений, нужно выделить углы, расположенные в интервале $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$

Запишем решение уравнения.

$$\beta_1 = \arcsin 0{,}5 + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$\beta_2 = \pi - \arcsin 0{,}5 + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Построим тригонометрический круг.

Проведем линию синуса через ординату равную $\frac{1}{2}$. Проведем радиусы к точкам пересечения линии синуса и окружности. Синусы углов между ними и осью OX будут равны $\frac{1}{2}$.

Выделим интервал $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, от меньшего угла к большему против часовой стрелки.

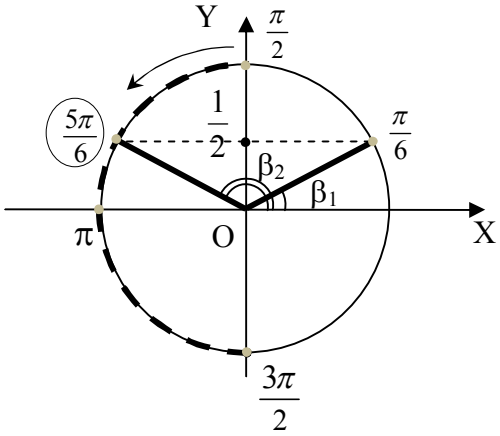


Рис. 105

В этот интервал не попадает угол $\frac{\pi}{6}$ и все углы равные $\frac{\pi}{6}+2\pi n$. А угол – попадает. Причем, только он один.

Следовательно, решение уравнение: множество углов

$$\beta_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \beta_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

или одной строкой

$$\beta=(-1)^n\frac{\pi}{6} +\pi$$

В заданный интервал, из этого множества значений углов, попадает только один угол: $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

Покажем то же решение на графике.

Построим график функции $y = \sin\beta$

Отложим по оси ОХ значения углов, выраженные в радианах, а по оси ОУ – значения синусов этих углов.

Так как в нашем уравнении $y = \sin\beta = 0{,}5$, проведем прямую (пунктиром), параллельную оси ОХ, через ординату равную $\frac{1}{2}$.

Решениями нашего уравнения являются координаты проекций точек пересечения этой прямой и графика $y = \sin\beta$. В нашем случае, такое решение только одно $\beta = \frac{5\pi}{6}$, т.к. только этот угол попадает в заданный интервал $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

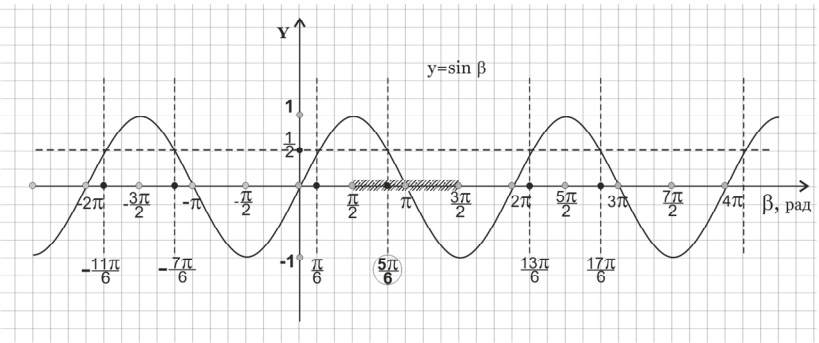


Рис. 106

Решим еще одно уравнение

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Запишем решение уравнения.

$$\gamma = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Допустим, что из всего множества этих решений, требуется выделить углы, расположенные в интервале $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

Построим тригонометрический круг.

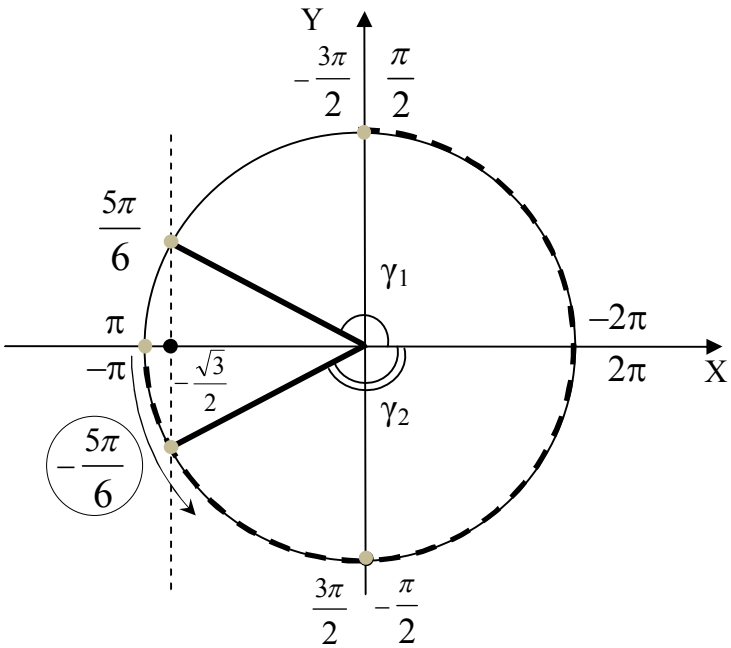


Рис. 107

Проведем линию косинуса через абсциссу, равную ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$). Проведем радиусы к точкам пересечения линии косинуса и окружности. Косинусы углов между ними и осью OX будут равны ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Выделим на окружности пунктиром интервал $[-\pi;\frac{\pi}{2}]$, от меньшего угла к большему против часовой стрелки.

В этот интервал попадает только угол $\gamma_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Покажем то же решение на графике.

Построим график функции y = cos γ.

Отложим по оси OX значения углов, выраженные в радианах, а по оси OY – значения косинусов этих углов.

Так как в нашем уравнении y= cos γ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, проведем прямую (пунктиром), параллельную оси OY, через абсциссу, равную ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Решениями нашего уравнения являются координаты проекций точек пересечения этой прямой и графика y= cos γ.

Это углы $\gamma = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

В заданный интервал $[-\pi;\frac{\pi}{2}]$ попадает только один угол $\gamma=-\frac{5\pi}{6}$.

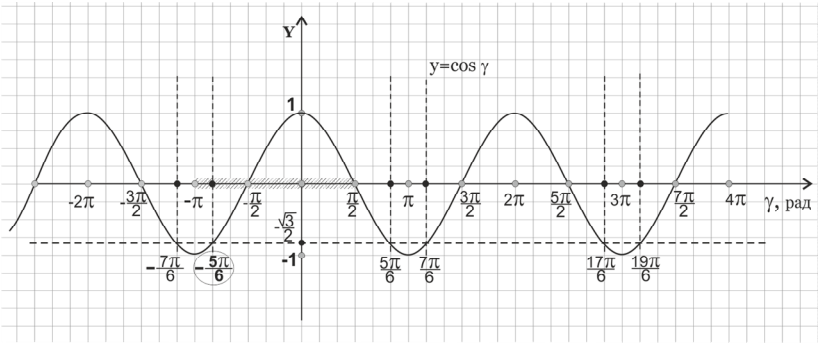


Рис. 108

Урок 52, на котором знакомимся с новым математическим действием – вычислением производной

Формулы и функции становятся все сложнее, а требования к точности измерений и вычислений, все выше. В какой-то момент, известный нам математический инструментарий может оказаться слишком грубым, и нам потребует инструмент более точный и более мощный.

Рассмотрим движение автомобиля. Его координаты меняются с течением времени. Изменение координаты в единицу времени, называется скоростью изменения координаты. Это мы знаем.

При прямолинейном равномерном движении изменение координаты равно перемещению. Это тоже мы знаем. А чему равна скорость автомобиля в точке с координатой x?

Изменение координаты в точке равно нулю. Следовательно, скорость в данной точке тоже равна нулю. И в соседней точке тоже. Во всех точках скорость равна нулю. Это следует из формулы v=S/t. Следовательно, в каждой точке перемещение равно нулю (S=0). Как же автомобиль движется? И как вычислить скорость в данной точке. Выходит, старый метод – деление перемещения на время – для вычисления скорости не подходит.

Математики нашли выход. Примерно такой же, как и в случае с выводом формулы для площади круга (рис. 35).

Мы знаем, что изменение перемещения есть функция времени, т.е. $\Delta S = f(t)$. Следовательно, скорость в данной точке есть отношение изменения перемещения к промежутку времени, который стремится к нулю. Только в этом случае получается скорость в данной точке, т.к. при этом перемещение становится бесконечно малым, т.е. обращается в точку.

Параметрически это запишется так:

$$v(x_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Читается это так: скорость (v) в данной точке с координатой x_0 равна пределу отношения изменения перемещения к бесконечно малому промежутку времени. Это, так называемое, предельное отношение или **производная.**

Вычисление производной – математическое действие. Обозначается оно штрихом справа вверху функции. Например, $y'=f'(x)$ означает, что нужно взять производную от функции $y=f(x)$.

Как же ее берут?

Рассмотрим общий случай. Пусть дана функция $y=f(x)$. Ее производная будет:

$$y'=f'(x)= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Предел отношения изменения функции к изменению аргумента, когда последнее стремится к нулю, называется ***производной*** *данной функции.*

Как ее вычисляют?

Мы знаем, что $\Delta f(x)= f(x) - f(x_0)$ и $\Delta x=x-x_0$.

Т.к. $x=x_0+\Delta x$, то можем записать

$f(x) - f(x_0)= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Сделаем замену в формуле для производной.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

И что с этим делать? Например, как вычислить производную функции $f(x)=x^2$?

Подставим в формулу для вычисления производной функции значение самой функции.

$$f'(x) = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2 \lim_{\Delta x \to 0} x_0 = 2x.$$

Мы вычислили производную функции $f(x)=x^2$. Она равна $2x$. Точно так же можно вычислить производную функции $f(x)=x^3$. Она будет равна $3x^2$.

В общем виде:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Для примера, вычислим величину скорости тела через 3 секунды после того, как его подбросили вертикально вверх с начальной скоростью равной 40 *м/с*?

Из курса физики формула для вычисления координаты равноускорено движущегося тела выглядит так:

$$x = x_0 + v_0 t + at^2/2.$$

Здесь, координата x – функция, а время t – аргумент. Вычислим производную этой функции, подставим в нее наши данные и получим скорость тела.

$$v = x' = (x_0 + v_0 t + at^2/2)' = v_0 + at.$$

У нас v_0=40 *м/с*; a= –9,8 *м/с*^{2} (ускорение свободного падения); t=3 *с*.

Следовательно,

$$v = 40\ м/с - 9{,}8\ м/с^2 \cdot 3\ с = 10{,}6\ м/с.$$

А можно ли вычислить величину производной как-нибудь иначе? Можно. Геометрически.

Рассмотрим геометрическое представление производной. На рис. 109 изображен график функции $y=f(x)$. К графику в точке А проведена касательная.

Пусть производная этой функции в точке с координатой x_0 равна

$$y'=f'(x_0).$$

Абсциссе x_0 соответствует ордината y_0.

Возьмем на оси ОХ точку с координатой x так, чтобы $x > x_0$. Абсциссе x соответствует ордината y.

Здесь,

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

Производная функции $y'=f'(x_0)$ по определению равна:

$$y'=f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

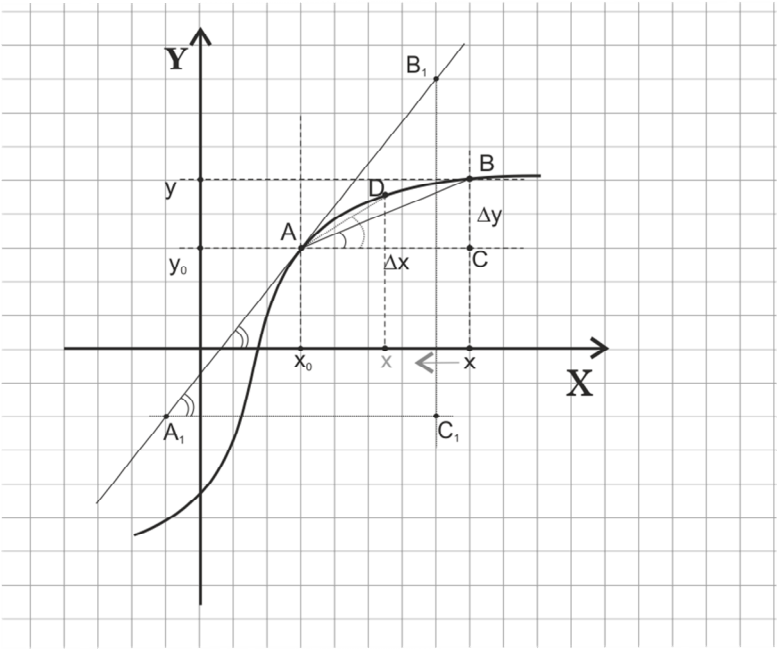


Рис. 109

Пока все понятно. Не понятно только, для чего здесь касательная. Не будем спешить. Продолжим.

Соединим отрезком точки A(x_0; y_0) и B(x; y). В прямоугольном треугольнике ABC

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,(\angle \text{BAC})$$

При $\Delta x \to 0$ имеем $\angle \text{BAC} \to \angle \text{B}_1\text{A}_1\text{C}_1$

– Почему?

– Например, если Δx уменьшить вдвое, т.е. переместить точку x влево на половину длины отрезка до x_0, то получим угол DAC. Он очевидно больше, чем угол BAC. Видишь, на чертеже?

– Да.

– При дальнейшем уменьшении Δx угол будет продолжать расти и в пределе, при $\Delta x \to 0$, стремится к углу B_1AC. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,(\angle B_1AC)$$

Это и есть производная функции в точке x_0.

Сравним угол B_1AC и угол наклона касательной в точке x_0 к оси OX. Они равны.

Итак, *производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в точке x_0.*

Тангенс угла наклона касательной легко вычислить по графику. Надо подобрать прямоугольный треугольник с гипотенузой, лежащей на касательной так, чтобы его вершины имели целочисленные координаты. На нашем чертеже, таких треугольников два. Это $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔAB_1C.

$$\text{tg}\,(\angle B_1AC) = \text{tg}\,(\angle B_1A_1C_1) = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Для каждого из этих треугольников, угол между гипотенузой и основанием треугольника равен углу наклона касательной.

Следовательно, производная нашей функции в точке x_0 тоже равна 1,25.

Итак,

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,\alpha$$

Урок 53, на котором производная помогает анализировать функцию

Если есть график функции, то провести ее анализ не представляет труда. А если графика нет?

В самом деле, может так случиться, что построить график функции достаточно сложно, но некоторые ее свойства необходимо быстро вычислить. Здесь нам поможет производная функции.

Например, как вычислить интервалы возрастания и убывания функции. Рассмотрим, как ведет себя производная функции на этих интервалах.

1. Пусть функция возрастает на некотором интервале (рис. 110). Возьмем на оси OX любые две точки x_1 и x_2 этого интервала такие, что $x_2 > x_1$

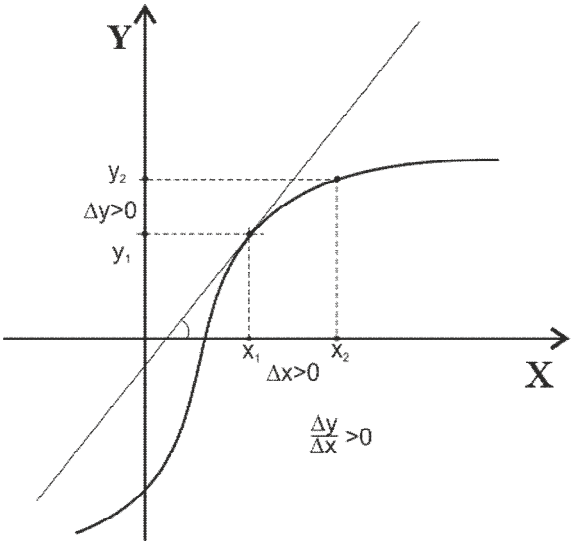


Рис. 110

Здесь, $x_2 - x_1 = \Delta x > 0$ и $y_2 - y_1 = \Delta y > 0$.

Следовательно,

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Т.е. производная возрастающей функции всегда положительна.

Угол наклона касательной к любой точке графика этой функции на данном интервале острый, т.е. находится в интервал от 0º до 90º. Тангенс этого угла тоже положителен.

Значит, если производная функции на некотором интервале положительна, то на этом интервале функция возрастает.

И что с этим делать?

Это правило позволяет вычислить интервалы возрастания функции, не строя ее график. Вначале надо вычислить производную функции. Потом вычислить интервалы значений аргументов, для которых эта производная будет больше нуля, т.е. решить неравенство

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

2. Пусть функция убывает на некотором интервале (рис. 111). Возьмем на оси OX любые две точки x_1 и x_2 этого интервала такие, что $x_2 > x_1$.

Здесь, $x_2 - x_1 = \Delta x > 0$, но $y_2 - y_1 = \Delta y < 0$

Следовательно,

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

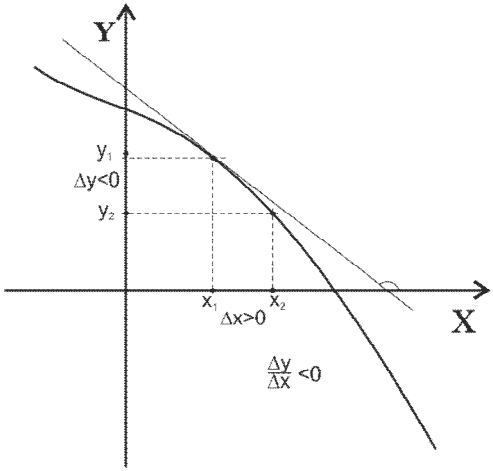


Рис. 111

Производная убывающей функции всегда отрицательна.

Угол наклона касательной к любой точке графика этой функции на данном интервале тупой, т.е. находится в интервал от 90º до 180º. Тангенс этого угла тоже отрицателен.

Следовательно, если производная функции на некотором интервале отрицательна, то на этом интервале функция убывает.

Чтобы вычислить интервалы убывания функции, не строя ее график, надо вычислить производную функции. Потом вычислить интервалы значений аргументов, для которых эта производная будет меньше нуля, т.е. решит неравенство

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

3. А какова производная в точках, где возрастание функции сменяется на убывание и наоборот. Значения функции в этих точках называют **максимумами** или **минимумами** функции. Общее название – **экстремумы функции**. А сами точки называют **точками максимума** и **точками минимума** или **точками экстремума.**

Касательные к графику функции в точках ее экстремумов параллельны оси OX, т.е. углы их наклона к оси OX равны нулю. Следовательно, тангенсы углов наклона тоже равны нулю.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0. Если при переходе значений аргумента через эту точку функция меняет знак, то это – точка экстремума. Если в этой точке есть производная, то она рана нулю.

Если функция не меняет знак, то производной в этой точке нет

Если знак функции меняется с плюса на минус, то это точка локального максимума.

Если знак функция меняется с минуса на плюс, то это точка локального минимума.

Чтобы вычислить *минимум функции* надо вычислить *точку минимума* и подставить ее значение в уравнение функции. Вычисленное значение функции в точке минимума и будет *минимумом функции*.

Чтобы вычислить *максимум функции* надо вычислить *точку максимума* и подставить ее значение в уравнение функции. Вычисленное значение функции в точке максимума и будет *максимумом функции*.

Итак, надо различать *максимум функции*, *точку максимума* и *максимальное значение функции*.

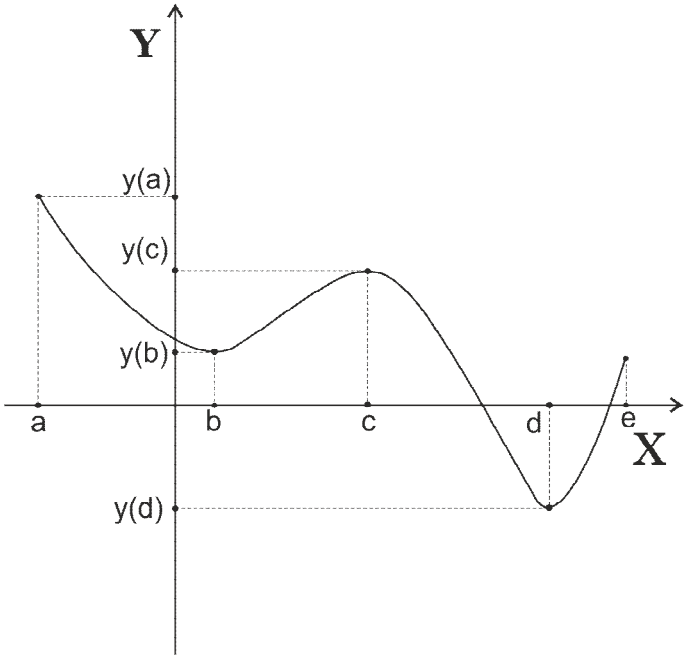


Рис. 112

На рис. 112 изображен график некоторой функции заданной в интервале [*a*; *e*].

Здесь,

абсцисса *b* – точка минимума функции;

ордината *y*(*b*) – минимум функции;

абсцисса *c* – точка максимума функции;

ордината *y*(*c*) – максимум функции;

абсцисса *d* – точка минимума функции;

ордината *y*(*d*) – минимум функции, причем, она же – минимальное значение функции;

ордината *y*(*a*) – максимальное значение функции.

Чтобы вычислить точку минимума надо вычислить производную функции, приравнять ее нулю и решить уравнение

$$y'=f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Теперь можно определить знаки производной в интервалах между точками экстремумов (точек минимумов и точек максимумов). Если знак меняется с плюса на минус, значит это точка максимума. Если с минуса на плюс – точка минимума.

Например.

Вычислите точки минимума и минимум функции

$$y = (x-2)^2(x+5)-1$$

1. Вычислим производную этой функции.

$$y' = [(x+3)^2(x+5)-1]' = [(x^2+6x+9)(x+5)-1]' =$$
$$= [(x^3+5x^2+6x^2+30x +9x+45- 1]' =$$
$$= (x^3+11x^2+39x-44)' = 3x^2+22x+39.$$

Приравняем производную нулю и вычислим корни получившегося уравнения.

$$3x^2+22x+39=0$$

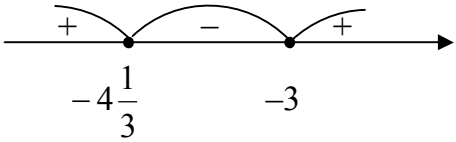
$$x_1=-3;\ \ x_2= -4\frac{1}{3}$$

Следовательно:

$$3x^2+22x+39=3(x+3)(x+4\frac{1}{3})$$

Вычислим интервалы, где производная положительна, т.е. решим неравенство:

$$3(x+3)(x+4\frac{1}{3})>0$$



В точке $x= -3$ производная функции меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в это точка минимума функции.

Вычислим минимум функции. Т.е. вычислим значение функции при $x= -3$

$y = (x-2)^2(x+5)-1=(3-2)^2(3+5)-1=7.$

Мы вычислили точку минимума и минимум функции.

Наш ученик может спросить, а для чего это надо?

Здесь можно привести пример из физики.

Задача. *Стрела выпущена вертикально вверх с начальной скоростью* 49 *м/с. Какова максимальная высота полета стрелы? Через сколько секунд она окажется на этой высоте?*

С помощью производной задача решается быстрее, чем обычным способом.

Высота, на которой окажется стрела, зависит от времени, т.е. $h=f(t)$. Эта функция задается формулой

$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где v_0 – начальная скорость (здесь, v_0=49 *м/с*) ; a – ускорение (здесь, a =–9,8 *м/с*^{2}).

Вычислим производную этой функции.

$$h' = \left(v_0 t + \frac{at^2}{2} \right)' = v_0 + at$$

Подставим численные значения и приравняем ее нулю.

$49 - 9{,}8 \cdot t = 0$

$t = 5$ (c)

Следовательно, наивысшей точки стрела достигнет через 5 секунд. Чтобы вычислить эту высоту, подставим вычисленное время в формулу для высоты:

$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 49 \cdot 5 - \frac{9{,}8 \cdot 5^2}{2} = 122{,}5 \ (м).$$

Приложение. Базовый уровень ЕГЭ.

Мы не готовились специально к ЕГЭ. Но, тем не менее, пройденных уроков достаточно, чтобы разобраться с заданиями базового уровня ЕГЭ по математике.

Демонстрационный вариант взят на сайте:
http://ege.edu.ru/main/demovers/

Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2015 года по математике

Базовый уровень

Подготовлен Федеральным государственным бюджетным научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2015 года по МАТЕМАТИКЕ.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности.

В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на каждую позицию экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждую позицию будет предложено только одно задание.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2015 году.

1. Найдите значение выражения

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+2$$

Ответ: _____ (стр. 32)

или

Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot 6$$

Ответ: _____ (стр. 45)

или

Найдите значение выражения

$$1{,}2-6{,}9\cdot\frac{1}{2}$$

Ответ: _____ (стр. 50)

2. Найдите значение выражения

$$\frac{0{,}24\cdot 10^6}{0{,}6\cdot 10^4}$$

Ответ: _____ (стр. 150)

или

$$\frac{2^6\cdot 3^8}{6^5}$$

Ответ: _____ (стр. 150)

3. Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) в РФ составляет 13% от начисленной заработной платы. Сколько рублей получает работник после уплаты НДФЛ, если начисленная заработная плата составляет 20000 рублей?

Ответ: _____ (стр. 45)

или

ЕГЭ по физике сдавали 25 выпускников школы, что составляет треть от общего количества выпускников. Сколько выпускников этой школы не сдавали экзамен по физике?

Ответ: _____ (стр. 45)

4. Найдите m из равенства $F = ma$, если $F = 84$ и $a = 12$.

Ответ: _____ (стр. 58)

или

Найдите v_0 из равенства $v = v_0 + at$, если $v = 20$, $t = 2$ и $a = 1$.

Ответ: _____ (стр. 58)

или

Найдите S, если $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ и $v_0 = 6$, $t = 2$, $a = -2$.

Ответ: _____ (стр. 58)

$\boxed{5.}$ Найдите cos α, если sin $\alpha = 0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$.

Ответ: _____ (стр.220)

или

Найдите sin 390°.

Ответ: _____ (стр.241)

6. Баночка йогурта стоит 4 рубля 60 копеек. Какое наибольшее количество баночек йогурта можно купить на 25 рублей?

Ответ: _____ (стр.58)

или

Килограмм моркови стоит 40 рублей. Олег купил 2 килограмма моркови. Сколько рублей сдачи он должен получить со 100 рублей?

Ответ: _____ (стр. 65)

или

Для ремонта квартиры требуется 63 рулона обоев. Какое минимальное количество пачек обойного клея нужно купить для ремонта квартиры, если 1 пачка клея рассчитана на 6 рулонов?

Ответ: _____ (стр.65)

$\boxed{7.}$ Найдите корень уравнения $3^{x-3} = 81$

Ответ: _____ (стр.160)

или

Найдите корень уравнения $\log_2(x-3) = 6$

Ответ: _____ (стр.165)

или

Найдите отрицательный корень уравнения

$x^2 - x - 6 = 0$.

Ответ:_____ (стр.125)

8. Участок земли для строительства санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 900 м и 400 м. Одна из больших сторон участка идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно отгородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

Ответ:_____(стр.108)

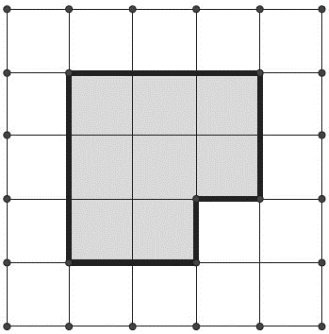
или

В квартире две прямоугольные комнаты. Размеры первой комнаты — 6*м*×3*м*, а размеры второй комнаты — 5*м*×4*м*. Какая из этих комнат больше по площади? В ответ запишите площадь этой комнаты в квадратных метрах.

Ответ:_____ (стр. 108)

или

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 10*м*×10*м*. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в $м^2$.



Ответ:_____

9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) рост ребёнка	1) 32 *км*
Б) толщина листа бумаги	2) 30 *м*
В) длина автобусного маршрута	3) 0,2 *мм*
Г) высота жилого дома	4) 110 *см*

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

или

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) вес взрослого человека	1) 8 т
Б) вес грузового автомобиля	2) 5 *г*
В) вес книжки	3) 65 *кг*
Г) вес пуговицы на одежде	4) 300 *г*

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10. В чемпионате по прыжкам в воду участвуют 35 спортсменов: 7 из России, 12 из Китая, 9 из Японии и 7 из США. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется представителем России.

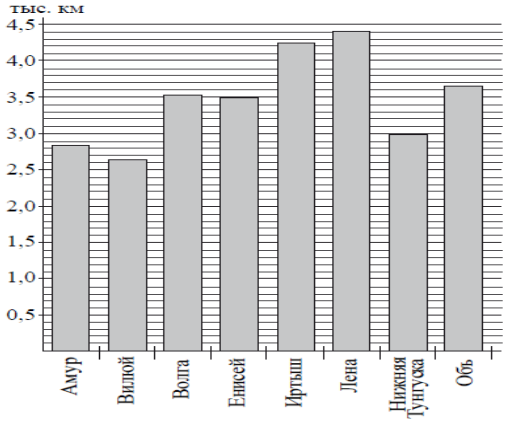
Ответ: _____ (стр.137)

или

Из каждых 100 лампочек, поступающих в магазин, в среднем 3 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампочка, окажется исправной?

Ответ: _____ (стр. 137)

11. На диаграмме приведены данные о протяжённости восьми крупнейших рек России. Первое место по протяжённости занимает Лена. На каком месте по протяжённости находится Амур?



Ответ: _____

или

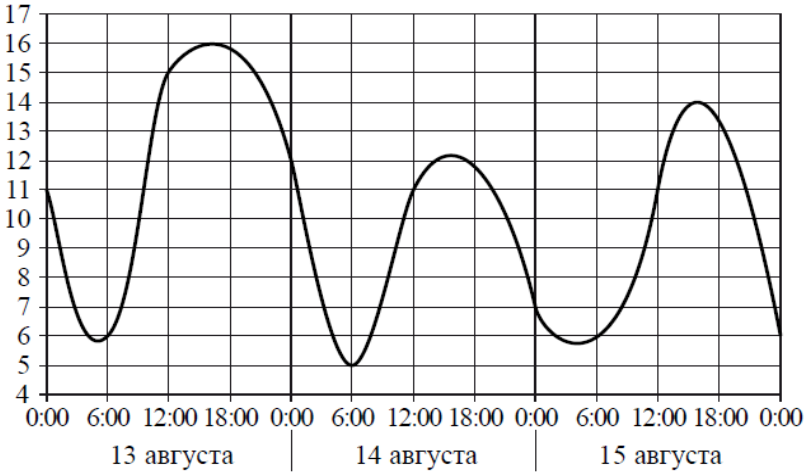
В таблице показано распределение медалей на Зимних Олимпийских играх в Сочи среди команд, занявших первые 10 мест по количеству золотых медалей. Сколько серебряных медалей у команды, занявшей второе место по числу золотых медалей?

Места	Команды	Медали			
		Золотые	Серебряные	Бронзовые	Всего
1	Россия	13	11	9	33
2	Норвегия	11	5	10	26
3	Канада	10	10	5	25
4	США	9	7	12	28
5	Нидерланды	8	7	9	24
6	Германия	8	6	5	19
7	Швейцария	6	3	2	11
8	Республика Беларусь	5	0	1	6
9	Австрия	4	8	5	17
10	Франция	4	4	7	15

Ответ: _____

или

На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



Ответ: _____ (стр.200)

12. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Переводчики	Языки	Стоимость услуг (рублей в день)
1	Немецкий, испанский	7000
2	Английский, немецкий	6000
3	Английский	3000
4	Английский, французский	6000
5	Французский	2000
6	Испанский	4000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немец-

ким, французским и испанским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 12000 рублей в день.

В ответе для собранной группы укажите номера переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____

или

Турист подбирает себе экскурсии. Сведения об экскурсиях представлены в таблице.

Экскурсии	Посещаемые объекты	Стоимость (рублей)
1	Крепость, загородный дворец	350
2	Музей живописи	100
3	Парк	150
4	Парк, музей живописи	300
5	Парк, крепость	300
6	Загородный дворец	200

Пользуясь таблицей, подберите экскурсионный пакет так, чтобы турист посетил четыре объекта: крепость, загородный дворец, парк и музей живописи, а суммарная стоимость экскурсий не превышала бы 600 рублей.

В ответе для собранного комплекта укажите номера экскурсий без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____

или

Строительная фирма планирует купить 70 $м^3$ пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

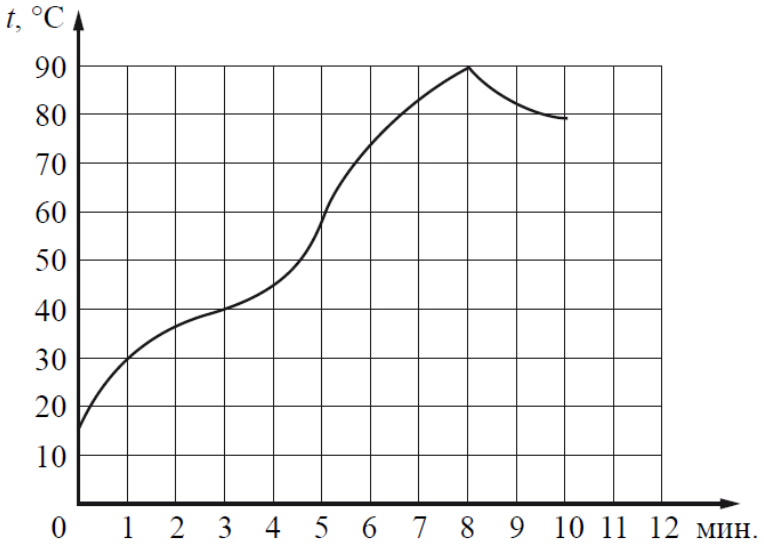
Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
А	2600	10 000	Нет
Б	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная
В	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная

Ответ: _____

13. В сосуд цилиндрической формы налили воду до уровня 80 *см*. Какого уровня достигнет вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в *см*.

Ответ: _____ (стр.139)

14. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА
А) 0 - 2 мин.	1) температура росла медленнее всего
Б) 2-4 мин.	2) температура падала
В) 4 - 6 мин.	3) температура росла быстрее всего
Г) 8-10 мин.	4) температура не превышала 40 °С

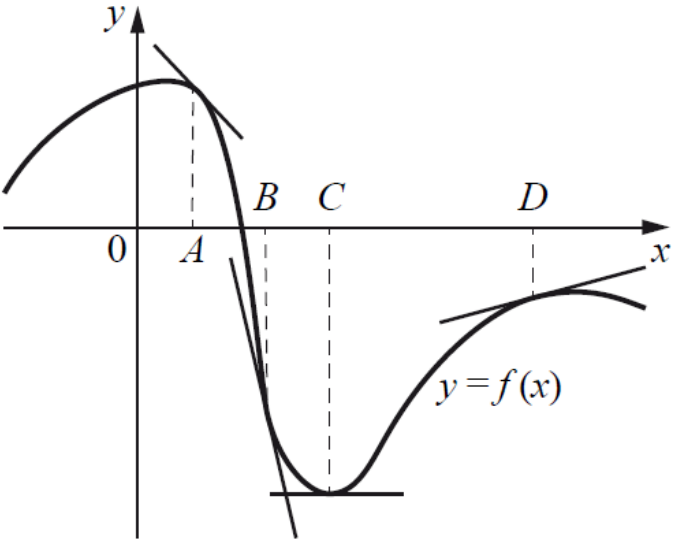
В таблице под каждой буквой, соответствующей интервалу времени, укажите номер характеристики процесса.

Ответ: (стр. 139)

А	Б	В	Г

или

На рисунке изображён график функции y = f(x), к которому проведены касательные в четырёх точках.



Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной.

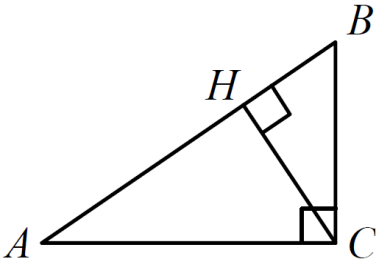
ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
A	1) 0
B	2) –1
C	3) 0,3
D	4) –5,5

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ: (стр. 268)

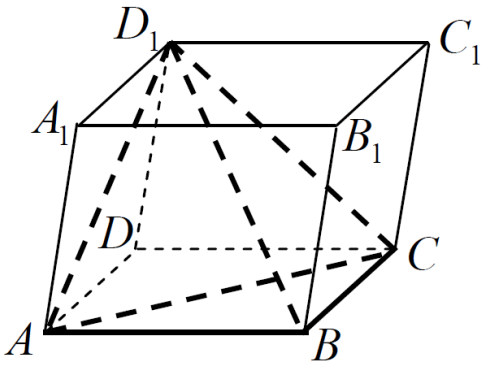
A	B	C	D

15. В треугольнике ABC угол ACB равен 90°, cos A = 0,8, AC = 4. Отрезок CH — высота треугольника (см. рис.). Найдите длину отрезка *AH*.



Ответ: _____ (стр.205)

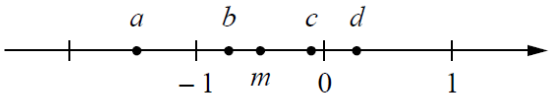
16. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 15. Найдите объём пирамиды D_1ABC (см. рис.).



Ответ: _____ (стр.145)

17. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и m. Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца.

ТОЧКИ



ЧИСЛА

1) $m-\frac{1}{4}$

2) $-\frac{m}{2}$

3) $3m$

4) m^3

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ: (стр. 131)

a	b	c	d

или

Каждому из четырёх неравенств слева соответствует одно из решений, изображённых на координатной прямой справа.

Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

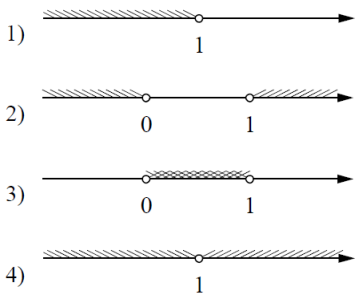
А) $x(1-x)>0$

Б) $1-x=0$

В) $(1-x)^2>0$

Г) $x(1-x)<0$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ: (стр. 131)

А	Б	В	Г

18. В городе Z в 2013 году мальчиков родилось больше, чем девочек. Мальчиков чаще всего называли Андрей, а девочек – Мария. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

Среди рождённых в 2013 году в городе Z:

1) девочек с именем Мария больше, чем с именем Светлана.

2) мальчиков с именем Николай больше, чем с именем Аристарх.

3) хотя бы одного из родившихся мальчиков назвали Андреем.

4) мальчиков с именем Андрей больше, чем девочек с именем Мария.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____

или

Известно, что Витя выше Коли, Маша выше Ани, а Саша ниже и Коли, и Маши. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

1) Витя выше Саши.

2) Саша ниже Ани.

3) Коля и Маша одного роста.

4) Витя самый высокий из всех.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: _____

19. Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Ответ: _____ (просто подберите числа)

20. Улитка за день залезает вверх по дереву на 3 *м*, а за ночь спускается на 2 *м*. Высота дерева 10 *м*. За сколько дней улитка поднимется на вершину дерева?

Ответ: _____ (стр.58)

Заключение

Мы рассмотрели только некоторые темы из курса школьной математики. Все уроки были проведены по следующему алгоритму:

1. Мы *наблюдали*

2. *Описывали* наблюдаемое

3. Строили *определение*

4. Присваивали *термин*

4. *Считали* – описывали количество единиц в группе, обозначая максимальное количество элементов в данной группе цифрами и числительными

6. *Измеряли* – описывали размер, сравнивая величины с эталонами.

7. *Вычисляли* с помощью связей между параметрами (*формулы*) то, что трудно *или* невозможно измерить.

8. *Ориентировались* на местности, описывая положение тела в пространстве с помощью *координат.*

Восемь шагов…

Первые восемь шагов к познанию. А знание – это переведенная в знаковую форму абстракция.

Еще раз заметим, что вышеприведенные уроки – это только помощь родителям в их разговорах с детьми о учебе в школе. По каждой теме необходимо прорешать десятки задач и сделать сотни упражнений для перевода знаний вначале в умения, потом в навыки. Это возможно только при систематической работе с профессиональным педагогом.

Доброй вам учебы и хороших учителей!

Содержание

Предисловие 3

Урок 1, на котором простое становится сложным и не определенным 6

Урок 2, на котором сложное опять становится простым и определенным 9

Урок 3, на котором у определений появляются термины 13

Урок 4, на котором учимся считать 20

Урок 5, на котором появляется арифметика 26

Урок 6, на котором учимся делить восемь палочек на два... 29

Урок 7, на котором появляются дроби 32

Урок 8, на котором появляются дроби, которые не хотят складываться 40

Урок 9, на котором выясняется, что отнять и взять – не одно и то же 45

Урок 10, на котором появляются десятичные дроби и проценты 50

Урок 11, на котором выясняется, что не все можно измерить и появляется формула 53

Урок 12, на котором появляются задачи 58

Урок 13, на котором весы помогают решить уравнение 61

Урок 14, на котором выводим универсальный метод для решения любых задачи 65

Урок 15, в котором появляются числа солнца и луны 73

Урок 16, на котором радианы спорят с градусами 82

Урок 17, на котором появляется первая теорема 88

Урок 18, на котором теорема помогает перестраивать крышу 94

Урок 19, на котором площадь находит свою площадь 99

Урок 20, на котором выводим формулу из формулы 103

Урок 21, на котором вычисляем площади простых фигур . 108

Урок 22, на котором доказывается знаменитая теорема Пифагора 116

Урок 23, на котором выясняется, что теорема помогает обходить препятствия 120

Урок 24, на котором появляется дискриминант 125

Урок 25, на котором хорда рождает неравенство 131

Урок 26, на котором измеряем вероятность и проверяем достоверность 137

Урок 27, на котором появляется 3D геометрия 139

Урок 28, на котором пространство заполняется объемами 145

Урок 29, на котором степень возводим в степень 150

Урок 30, на котором идет игра в превращения 156

Урок 31, на котором извлекаем корни 160

Урок 32, на котором корни и степени знакомятся с логарифмами 165

Урок 33, на котором царевичи разгадывают загадки 171

Урок 34, на котором все находят свои места 177

Урок 35, на котором координата обретает смысл 181

Урок 36, на котором выясняется, для чего нужны координаты 183

Урок 37, на котором параметр превращается в коэффициент 189

Урок 38, на котором аргумент командует функцией 193

Урок 39, на котором анализируем функцию 200

Урок 40, на котором график помогает решать неравенства 202

Урок 41, на котором тригонометрия связывает стороны и углы треугольника 205

Урок 42, на котором делаем то, что можем делать и не делаем то, что не можем делать 209

Урок 43, на котором появляются странные треугольники . 215

Урок 44, на котором тригонометрические формулы превращаются друг в друга 220

Урок 45, на котором у синусов и косинусов обнаруживаются свои теоремы 224

Урок 46, на котором знакомимся с формулами приведения 233

Урок 47, на котором появляются витки и обороты 241

Урок 48, на котором появляются отрицательные углы 246

Урок 49, на котором появляются синусы и косинусы всех возможных углов 248

Урок 50, на котором появляются тригонометрические уравнения 251

Урок 51, на котором решение тригонометрических уравнений ставится в рамки 256

Урок 52, на котором знакомимся с новым математическим действием – вычислением производной 262

Урок 53, на котором производная помогает анализировать функцию..... 268

Приложение. Базовый уровень ЕГЭ..... 276

Заключение 294

Если вам понравилась данная книга,
и вы решили развить
познавательные способности ваших детей,
обращайтесь к нам:

Образовательный центр

Давуда Асадулаевича Зулумханова

«Новый круг»

– изучение заново основ математики;

– подготовка к ЕГЭ по математике;

– изучение математики на английском языке;

– подготовка к международным тестам по математике SAT Reasoning Test (Math);

– репетитор по математике и физике;

– специальные шестичасовые курсы для родителей: «Как научить детей делать уроки»

– специальные шестичасовые курсы для учителей, желающих овладеть методикой Д.А. Зулумханова.

г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 34
Тел.: 8 964 054-94-49

с к о р а я п е д а г о г и ч е с к а я п о м о щ ь

Давуд Асадулаевич Зулумханов

кандидат педагогических наук

ПРОСТАЯ МАТЕМАТИКА
для маленьких и взрослых

Пособие для родителей и не только

Научный редактор – к.ф.-м.н. *М.М. Гусейнов*

---

e-mail: **z.davud@mail.ru**

Видеоуроки:
www.facebook.com/pages/Новый-круг/117583421684430

978-5-904621-76-6